向量應用題

SnackLab 練習題 ・ 向量 ・ 9 題應用題與詳解 ・ snacklab.dev

這是 SnackLab 自製的練習題，依內積、外積、平面・直線・格拉姆－施密特的主題編排，所有答案都經過數值驗算。每一題都在 SnackLab 短影片中用向量箭頭解說，也可以用 SnackLab App 的 v→ 模式自己確認。

內積應用

1. 拉箱子做的功　用力 $F = (8, a)$ N 拉一個沿地面移動 $d = (5, 0)$ m 的箱子。求功 $W = F \cdot d$，並說明為何與 a 無關。$a = 6$ 時，求 F 與 d 的夾角。

2. 斜面上的重量　重量 $w = (0, -10)$ N 的物體放在方向 $d = (4, 3)$ 的斜面上。求 w 在 d 上的正射影、其長度，以及垂直於斜面的分量。

3. 立方體的對角線　一個稜在座標軸上、長度為 1, 1, a 的盒子。將對角線 $v = (1, 1, a)$ 與稜 $e = (1, 0, 0)$ 的夾角表示成 a 的式子，並求立方體（$a = 1$）時的值。

外積應用

4. 扳手的力矩　扳手 $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$ m 的末端受力 $\mathbf{F} = (a, 3, 0)$ N。求力矩 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$，並證明它與 a 無關。

5. 三角形面積　用外積求頂點為 $P(1, 0, 0)$、$Q(0, 2, 0)$、$R(0, 0, a)$ 的三角形面積，並求 $a = 3$ 時的值。

6. 體積與共面　求 $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$、$\mathbf{v} = (2, 0, 1)$、$\mathbf{w} = (1, a, 0)$ 在 $a = 2$ 時所張成平行六面體的體積，並求三向量共面時 a 的值。

平面・直線・格拉姆－施密特

7. 點到平面的距離　利用平面 $2x - y + 2z = 6$ 上的點 $Q(3, 0, 0)$，以 $\overrightarrow{QP}$ 在法向量上的正射影求點 $P(3, 1, a)$ 到平面的距離，並求 $a = 4$ 時的值。

8. 兩平面的交線　求兩平面 $x + y + z = 3$ 與 $x - y + 2z = 2$ 交線的向量方程式。

9. 格拉姆－施密特　對 $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$、$\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ 使用格拉姆－施密特正交化，求單位正交的一組 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$。

詳解

內積應用

1. 拉箱子做的功

- $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J。
- 只有沿 d 方向的分量做功，垂直分量 a 與 d 垂直。
- $a = 6$ 時 $|F| = 10$，$|d| = 5$，$\cos\theta = 40/50 = 0.8$。
- $\theta = \cos^{-1}(0.8) \approx 36.9°$。

> 答: $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J / 不論 a 都是 40 J：垂直分量不做功

2. 斜面上的重量

- $w \cdot d = 0 \cdot 4 + (-10) \cdot 3 = -30$，$|d|^2 = 25$。
- $\text{proj}_d w = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$，長度 6 N（沿斜面向下）。
- 垂直分量：$w - \text{proj} = (4.8, -6.4)$，長度 8 N。
- 驗算：$6^2 + 8^2 = 10^2$。

> 答: $\text{proj}_d w = (w \cdot d/|d|^2)\, d = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$ / 沿斜面 6 N，壓向斜面 8 N

3. 立方體的對角線

- $e \cdot v = 1$，$|e| = 1$，$|v| = \sqrt{(2 + a^2)}$。
- $\cos\theta = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$。
- 立方體 $a = 1$：$\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$。
- a 變大時對角線靠向 z 軸，$\theta \to 90°$。

> 答: $\cos\theta = e \cdot v/(|e||v|) = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$ / 立方體 $a = 1$：$\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$

外積應用

4. 扳手的力矩

- $r \times F = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3, 0 \cdot a - 2 \cdot 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$。
- x 分量 a 與 r 平行，平行力的外積為 0。
- $|\tau| = 6$ N・m，方向 +z（從上方看為逆時針）。
- 只有垂直分量 3 N × 力臂 2 m 起作用。

> 答: $\tau = r \times F = (0, 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$ / 不論 a 都是 $|\tau| = 6$ N・m（與 r 平行的分量力矩為 0）

5. 三角形面積

- PQ = (−1, 2, 0)，PR = (−1, 0, a)。
- PQ × PR = (2a, a, 2)。
- a = 3：(6, 3, 2)，|n| = √(36 + 9 + 4) = 7。
- 面積 = 7/2；n 也是平面 6x + 3y + 2z = 6 的法向量。

> 答: n = PQ × PR = (2a, a, 2) → (6, 3, 2) / 面積 = |n|/2 = 7/2

6. 體積與共面

- v × w = (0・0 − 1・a, 1・1 − 2・0, 2a − 0) = (−a, 1, 2a)。
- u ・ (v × w) = −a + 2 + 2a = a + 2。
- a = 2：體積 |4| = 4。
- 三重積為 0 時共面：a = −2。

> 答: v × w = (−a, 1, 2a) → u ・ (v × w) = a + 2 / a = 2：體積 4，a = −2：體積 0（共面）

平面・直線・格拉姆－施密特

7. 點到平面的距離

- n = (2, −1, 2)，|n| = 3；QP = (0, 1, a)。
- n ・ QP = −1 + 2a。
- 距離 = |n ・ QP|/|n| = |2a − 1|/3。
- a = 4：7/3；QP 在 n 上的正射影為 (7/9)(2, −1, 2)。

> 答: d = |n ・ QP|/|n| = |2a − 1|/3 / a = 4：d = 7/3

8. 兩平面的交線

- 交線同時垂直於兩法向量 $n_1 = (1, 1, 1)$、$n_2 = (1, −1, 2)$。
- $d = n_1 \times n_2 = (1・2 − 1・(−1), 1・1 − 1・2, 1・(−1) − 1・1) = (3, −1, −2)$。
- 取一點：令 z = 0，x + y = 3、x − y = 2 → (5/2, 1/2, 0)。
- 直線：r(t) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2)。

> 答: $d = n_1 \times n_2 = (3, −1, −2)$ / 直線：(x, y, z) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2)

9. 格拉姆－施密特

- $u_1 = v_1/|v_1| = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$。
- $\text{proj} = (v_2 \cdot v_1/|v_1|^2)\, v_1 = (1/2)(1, 1, 0) = (1/2, 1/2, 0)$。
- $w_2 = v_2 − \text{proj} = (1/2, −1/2, 1)$；驗算 $w_2 \cdot v_1 = 0$。
- $u_2 = w_2/|w_2| = (1, −1, 2)/\sqrt{6}$。

> 答: $w_2 = v_2 − (v_2 \cdot v_1/|v_1|^2)v_1 = (1/2, −1/2, 1)$ / $u_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$，$u_2 = (1, −1, 2)/\sqrt{6}$