벡터 활용 문제

SnackLab 연습문제 · 벡터 · 활용 문제 9개와 풀이 · snacklab.dev

SnackLab이 직접 만든 연습문제입니다. 내적, 외적, 평면 · 직선 · 그람-슈미트를 주제별로 구성했고, 모든 답은 수치 계산으로 검산했습니다. 각 문제는 SnackLab 숏츠에서 벡터 화살표로 풀이하며, SnackLab 앱의 v→ 모드로 직접 확인할 수 있습니다.

내적 활용

1. 상자를 끄는 일. 바닥을 따라 $\mathbf{d} = (5, 0)$ m 움직이는 상자를 힘 $\mathbf{F} = (8, a)$ N으로 끈다. 한 일 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$를 구하고, 이 값이 a와 상관없는 이유를 설명하여라. $a = 6$일 때 $\mathbf{F}$와 $\mathbf{d}$가 이루는 각을 구하여라.

2. 경사면 위의 무게. 무게 $\mathbf{w} = (0, -10)$ N인 물체가 방향 $\mathbf{d} = (4, 3)$인 경사면 위에 있다. $\mathbf{w}$의 $\mathbf{d}$ 위로의 정사영과 그 크기, 경사면에 수직인 성분을 구하여라.

3. 정육면체의 대각선. 모서리가 좌표축 위에 있고 길이가 1, 1, a인 상자가 있다. 대각선 $\mathbf{v} = (1, 1, a)$와 모서리 $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$이 이루는 각을 a의 식으로 나타내고, 정육면체($a = 1$)일 때의 값을 구하여라.

외적 활용

4. 렌치의 토크. 렌치 $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$ m의 끝에 힘 $\mathbf{F} = (a, 3, 0)$ N이 작용한다. 토크 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$를 구하고 a와 상관없음을 보여라.

5. 삼각형의 넓이. 꼭짓점이 $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, a)$인 삼각형의 넓이를 외적으로 구하고, $a = 3$일 때의 값을 구하여라.

6. 부피와 같은 평면. $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, a, 0)$이 만드는 평행육면체의 부피를 $a = 2$일 때 구하고, 세 벡터가 한 평면 위에 놓이는 a의 값을 구하여라.

평면 · 직선 · 그람-슈미트

7. 점과 평면 사이 거리. 평면 $2x - y + 2z = 6$ 위의 점 $Q(3, 0, 0)$을 이용해, 점 $P(3, 1, a)$에서 평면까지의 거리를 QP의 법선벡터 위로의 정사영으로 구하여라. $a = 4$일 때의 값을 구하여라.

8. 두 평면의 교선. 두 평면 $x + y + z = 3$과 $x - y + 2z = 2$가 만나는 직선의 벡터방정식을 구하여라.

9. 그람-슈미트. $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$에 그람-슈미트 과정을 적용해 정규직교 쌍 u_1, u_2를 구하여라.

풀이

내적 활용

1. 상자를 끄는 일

- $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J.
- d 방향 성분만 일을 하고, 수직 성분 a는 d에 수직이다.
- $a = 6$이면 $|F| = 10$, $|d| = 5$, $\cos\theta = 40/50 = 0.8$.
- $\theta = \cos^{-1}(0.8) \approx 36.9°$.

> 답: $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J / a와 상관없이 40 J: 수직 성분은 일을 하지 않는다

2. 경사면 위의 무게

- $w \cdot d = 0 \cdot 4 + (-10) \cdot 3 = -30$, $|d|^2 = 25$.
- $\text{proj}_d\, w = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$, 크기 6 N (경사면 아래쪽).
- 수직 성분: $w - \text{proj} = (4.8, -6.4)$, 크기 8 N.
- 확인: $6^2 + 8^2 = 10^2$.

> 답: $\text{proj}_d\, w = (w \cdot d/|d|^2)\, d = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$ / 경사면 방향 6 N, 면을 누르는 힘 8 N

3. 정육면체의 대각선

- $e \cdot v = 1$, $|e| = 1$, $|v| = \sqrt{(2 + a^2)}$.
- $\cos\theta = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$.
- 정육면체 $a = 1$: $\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$.
- a가 커지면 대각선이 z축 쪽으로 기울어 $\theta \to 90°$.

> 답: $\cos\theta = e \cdot v/(|e||v|) = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$ / 정육면체 $a = 1$: $\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$

외적 활용

4. 렌치의 토크

- $r \times F = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3, 0 \cdot a - 2 \cdot 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$.
- x 성분 a는 r과 평행하고, 평행한 힘의 외적은 0이다.
- $|\tau| = 6$ N·m, +z 방향 (위에서 보면 반시계 방향).
- 수직 성분 3 N × 팔 길이 2 m만 중요하다.

> 답: $\tau = r \times F = (0, 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$ / a와 상관없이 $|\tau| = 6$ N·m (r과 평행한 성분은 토크 0)

5. 삼각형의 넓이

- PQ = (−1, 2, 0), PR = (−1, 0, a).
- PQ × PR = (2a, a, 2).
- a = 3: (6, 3, 2), |n| = √(36 + 9 + 4) = 7.
- 넓이 = 7/2; n은 평면 6x + 3y + 2z = 6의 법선벡터이기도 하다.

> 답: n = PQ × PR = (2a, a, 2) → (6, 3, 2) / 넓이 = |n|/2 = 7/2

6. 부피와 같은 평면

- v × w = (0·0 − 1·a, 1·1 − 2·0, 2a − 0) = (−a, 1, 2a).
- u · (v × w) = −a + 2 + 2a = a + 2.
- a = 2: 부피 |4| = 4.
- 삼중곱이 0이면 한 평면: a = −2.

> 답: v × w = (−a, 1, 2a) → u · (v × w) = a + 2 / a = 2: 부피 4, a = −2: 부피 0 (한 평면)

평면 · 직선 · 그람-슈미트

7. 점과 평면 사이 거리

- n = (2, −1, 2), |n| = 3; QP = (0, 1, a).
- n · QP = −1 + 2a.
- 거리 = |n · QP|/|n| = |2a − 1|/3.
- a = 4: 7/3; QP의 n 위로의 정사영은 (7/9)(2, −1, 2).

> 답: d = |n · QP|/|n| = |2a − 1|/3 / a = 4: d = 7/3

8. 두 평면의 교선

- 교선은 두 법선 $n_1 = (1, 1, 1)$, $n_2 = (1, −1, 2)$에 모두 수직이다.
- $d = n_1 \times n_2 = (1·2 − 1·(−1), 1·1 − 1·2, 1·(−1) − 1·1) = (3, −1, −2)$.
- 한 점: z = 0이면 x + y = 3, x − y = 2 → (5/2, 1/2, 0).
- 직선: r(t) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2).

> 답: $d = n_1 \times n_2 = (3, −1, −2)$ / 직선: (x, y, z) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2)

9. 그람-슈미트

- $u_1 = v_1/|v_1| = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.
- $\text{proj} = (v_2 \cdot v_1/|v_1|^2)\, v_1 = (1/2)(1, 1, 0) = (1/2, 1/2, 0)$.
- $w_2 = v_2 − \text{proj} = (1/2, −1/2, 1)$; 확인 $w_2 \cdot v_1 = 0$.
- $u_2 = w_2/|w_2| = (1, −1, 2)/\sqrt{6}$.

> 답: $w_2 = v_2 − (v_2 \cdot v_1/|v_1|^2)v_1 = (1/2, −1/2, 1)$ / $u_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $u_2 = (1, −1, 2)/\sqrt{6}$