ベクトルの応用問題

SnackLab 演習問題・ベクトル・応用問題 9 問と解答・snacklab.dev

SnackLab オリジナルの演習問題です。内積、外積、平面・直線・グラム・シュミットをテーマ別に並べ、すべての答えは数値計算で検算しました。各問題は SnackLab のショート動画でベクトルの矢印を使って解説しており、SnackLab アプリの v→ モードで確かめられます。

内積の応用

1. 箱を引く仕事　床に沿って d = (5, 0) m 動く箱を力 F = (8, a) N で引く。仕事 W = F · d を求め、それが a によらない理由を説明せよ。a = 6 のとき F と d のなす角を求めよ。

2. 斜面上の重さ　重さ w = (0, −10) N の物体が方向 d = (4, 3) の斜面上にある。w の d への正射影とその大きさ、斜面に垂直な成分を求めよ。

3. 立方体の対角線　辺が座標軸上にあり長さが 1, 1, a の箱がある。対角線 v = (1, 1, a) と辺 e = (1, 0, 0) のなす角を a の式で表し、立方体（a = 1）のときの値を求めよ。

外積の応用

4. レンチのトルク　レンチ $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$ m の先端に力 $\mathbf{F} = (a, 3, 0)$ N がはたらく。トルク $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を求め、a によらないことを示せ。

5. 三角形の面積　頂点が $P(1, 0, 0)$、$Q(0, 2, 0)$、$R(0, 0, a)$ の三角形の面積を外積で求め、$a = 3$ のときの値を求めよ。

6. 体積と同一平面　$\mathbf{u} = (1, 2, 1)$、$\mathbf{v} = (2, 0, 1)$、$\mathbf{w} = (1, a, 0)$ が作る平行六面体の体積を $a = 2$ のとき求め、3 つのベクトルが同一平面上にある a の値を求めよ。

平面・直線・グラム・シュミット

7. 点と平面の距離　平面 $2x - y + 2z = 6$ 上の点 $Q(3, 0, 0)$ を使い、点 $P(3, 1, a)$ から平面までの距離を $\overrightarrow{QP}$ の法線ベクトルへの正射影で求めよ。$a = 4$ のときの値を求めよ。

8. 2 平面の交線　2 平面 $x + y + z = 3$ と $x - y + 2z = 2$ の交線のベクトル方程式を求めよ。

9. グラム・シュミット　$\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$、$\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ にグラム・シュミットの直交化を適用し、正規直交の組 $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ を求めよ。

解答

内積の応用

1. 箱を引く仕事

- $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J。
- d 方向の成分だけが仕事をし、垂直成分 a は d に垂直である。
- $a = 6$ のとき $|F| = 10$、$|d| = 5$、$\cos\theta = 40/50 = 0.8$。
- $\theta = \cos^{-1}(0.8) \approx 36.9°$。

> 答: $W = F \cdot d = 8 \cdot 5 + a \cdot 0 = 40$ J / a によらず 40 J：垂直成分は仕事をしない

2. 斜面上の重さ

- $w \cdot d = 0 \cdot 4 + (-10) \cdot 3 = -30$、$|d|^2 = 25$。
- $\text{proj}_d\, w = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$、大きさ 6 N（斜面の下向き）。
- 垂直成分：$w - \text{proj} = (4.8, -6.4)$、大きさ 8 N。
- 確認：$6^2 + 8^2 = 10^2$。

> 答: $\text{proj}_d\, w = (w \cdot d/|d|^2)\, d = (-30/25)(4, 3) = (-4.8, -3.6)$ / 斜面方向 6 N、面を押す力 8 N

3. 立方体の対角線

- $e \cdot v = 1$、$|e| = 1$、$|v| = \sqrt{(2 + a^2)}$。
- $\cos\theta = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$。
- 立方体 $a = 1$：$\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$。
- a が大きくなると対角線は z 軸に近づき $\theta \to 90°$。

> 答: $\cos\theta = e \cdot v/(|e||v|) = 1/\sqrt{(2 + a^2)}$ / 立方体 $a = 1$：$\cos\theta = 1/\sqrt{3} \to \theta \approx 54.7°$

外積の応用

4. レンチのトルク

- $r \times F = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3,\ 0 \cdot a - 2 \cdot 0,\ 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$。
- x 成分 a は r に平行で、平行な力の外積は 0。
- $|\tau| = 6$ N·m、+z 向き（上から見て反時計回り）。
- 垂直成分 3 N × 腕の長さ 2 m だけが効く。

> 答: $\tau = r \times F = (0, 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot a) = (0, 0, 6)$ / a によらず $|\tau| = 6$ N·m（r に平行な成分はトルク 0）

5. 三角形の面積

- PQ = (−1, 2, 0)、PR = (−1, 0, a)。
- PQ × PR = (2a, a, 2)。
- a = 3：(6, 3, 2)、|n| = √(36 + 9 + 4) = 7。
- 面積 = 7/2。n は平面 6x + 3y + 2z = 6 の法線ベクトルでもある。

> 答: n = PQ × PR = (2a, a, 2) → (6, 3, 2) / 面積 = |n|/2 = 7/2

6. 体積と同一平面

- v × w = (0·0 − 1·a, 1·1 − 2·0, 2a − 0) = (−a, 1, 2a)。
- u · (v × w) = −a + 2 + 2a = a + 2。
- a = 2：体積 |4| = 4。
- 三重積が 0 なら同一平面：a = −2。

> 答: v × w = (−a, 1, 2a) → u · (v × w) = a + 2 / a = 2：体積 4、a = −2：体積 0（同一平面）

平面・直線・グラム・シュミット

7. 点と平面の距離

- n = (2, −1, 2)、|n| = 3；QP = (0, 1, a)。
- n · QP = −1 + 2a。
- 距離 = |n · QP|/|n| = |2a − 1|/3。
- a = 4：7/3。QP の n への正射影は (7/9)(2, −1, 2)。

> 答: d = |n · QP|/|n| = |2a − 1|/3 / a = 4：d = 7/3

8. 2 平面の交線

- 交線は 2 つの法線 n_1 = (1, 1, 1)、n_2 = (1, −1, 2) の両方に垂直。
- d = n_1 × n_2 = (1·2 − 1·(−1), 1·1 − 1·2, 1·(−1) − 1·1) = (3, −1, −2)。
- 1 点：z = 0 とすると x + y = 3、x − y = 2 → (5/2, 1/2, 0)。
- 直線：r(t) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2)。

> 答: d = n_1 × n_2 = (3, −1, −2) / 直線：(x, y, z) = (5/2, 1/2, 0) + t(3, −1, −2)

9. グラム・シュミット

- u_1 = v_1/|v_1| = (1, 1, 0)/√2。
- proj = (v_2 · v_1/|v_1|²) v_1 = (1/2)(1, 1, 0) = (1/2, 1/2, 0)。
- w_2 = v_2 − proj = (1/2, −1/2, 1)；確認 w_2 · v_1 = 0。
- u_2 = w_2/|w_2| = (1, −1, 2)/√6。

> 答: w_2 = v_2 − (v_2·v_1/|v_1|²)v_1 = (1/2, −1/2, 1) / u_1 = (1, 1, 0)/√2、u_2 = (1, −1, 2)/√6