級數解應用題

SnackLab 練習題 • 微分方程的級數解 • 9 題應用題與詳解 • snacklab.dev

這是 SnackLab 自製的練習題，依冪級數解、弗羅貝尼烏斯法、貝索函數與勒讓德函數的主題編排，所有答案都經過符號或數值驗算。每一題都在 SnackLab 短影片中用圖形解說，也可以用 SnackLab App 的 d/dx 模式自己確認。

冪級數解

1. 折射率漸變層中的光　在折射率隨 x 線性變化的介質層中，波的振幅滿足艾里方程 $y'' = xy$，且 $y(0) = 1, y'(0) = 0$。求 $x = 0$ 附近的冪級數解，用三項估計 $y(1)$，並求 $x < 0$ 的第一個零點。

2. 擴散的熱脈衝　擴散的熱脈衝形狀滿足 $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$。求冪級數解，寫成封閉形式並計算 $y(1)$。

3. 量子諧振子　量子諧振子會得到埃爾米特方程 $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$。在 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 下求係數的遞迴式，證明只有 λ 為偶數時級數才會停止，並求 $\lambda = 2$ 的解。

弗羅貝尼烏斯法

4. 半整數階貝索　用弗羅貝尼烏斯法解 $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$。求指標方程的根，以及滿足 $y(\pi/2) = \sqrt{(2/\pi)}$, $y'(\pi/2) = -(1/2)(2/\pi)^{3/2}$ 的解，並求其零點。

5. 根為 0 與 1/2　對 $4xy'' + 2y' + y = 0$ 使用弗羅貝尼烏斯法，求指標方程的根、兩個級數解的封閉形式，以及滿足 $y(1) = \cos 1$, $y'(1) = -(\sin 1)/2$ 的解。第一個零點在哪裡？

6. 氫原子　氫原子的徑向部分會得到拉蓋爾方程 $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$。證明 $x = 0$ 是指標方程有重根的正則奇點，求 $y(0) = 1$ 的正則解的遞迴式，並求 $n = 2$ 的多項式及其零點。

貝索函數與勒讓德函數

7. 圓鼓的振動　半徑 1 的圓鼓，徑向形狀滿足 $y'' + y'/x + k^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$，邊緣固定 $y(1) = 0$。求前兩個模態的 k 值與頻率比。

8. 擺動的鏈條　長度 1 的懸掛鏈條小幅擺動（x 從自由端向上量）滿足 $xy'' + y' + \lambda y = 0$。頂端 $x = 1$ 固定（$y(1) = 0$），自由端有限（$y(0) = 1$）。用 $s = 2\sqrt{(\lambda x)}$ 代換求解，並求最小的 λ。

9. 球的電位　半徑 1 的球表面電位為 $V = \cos^2\theta$。球內 $V = \Sigma\, c_n r^n P_n(\cos\theta)$，$P_n$ 是勒讓德方程 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ 的解。說明 n 為何必須是整數，把 $\cos^2\theta$ 用勒讓德多項式展開，並求球心電位。

詳解

冪級數解

1. 折射率漸變層中的光

- 代入 $y = \Sigma\, a_n x^n$ 得 $\Sigma\,(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \Sigma\, a_{n-1}x^n$，且 $a_2 = 0$。
- 遞迴式 $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1))$；由 $a_0 = 1, a_1 = 0$ 得 $a_3 = 1/6$, $a_6 = 1/180$, $a_9 = 1/12960$。
- $y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + x^9/12960 + \cdots$；$y(1) \approx 1 + 0.1667 + 0.0056 = 1.1722$（真值 1.1723）。
- $x > 0$ 時遞增，$x < 0$ 時振盪。第一個零點 $x \approx -1.99$。

> 答: $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1))$ → $y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + \cdots$ / $y(1) \approx 1.1722$（三項就有 1.1722），第一個零點 $x \approx -1.99$

2. 擴散的熱脈衝

- $y = \Sigma\, a_n x^n$：$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n\,a_n + a_n = 0$。
- 所以 $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$；$a_2 = -1/2$, $a_4 = 1/8$, $a_6 = -1/48$，奇數項為 0。
- $y = \Sigma\,(-1)^k\, x^{2k}/(2^k k!) = e^{-x^2/2}$。
- $y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$。

> 答: $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$ → $y = 1 - x^2/2 + x^4/8 - x^6/48 + \cdots$ / $y = e^{-x^2/2}$，$y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$

3. 量子諧振子

- $y = \Sigma\, a_n x^n$：$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n\,a_n + 2\lambda\, a_n = 0$。
- $a_{n+2} = 2(n - \lambda)a_n/((n+2)(n+1))$。
- 只有偶數項，所以當 λ 等於某個偶數 n 時級數停止；否則會像 e^{x^2} 一樣增長。
- $\lambda = 2$：$a_2 = -2$, $a_4 = 0$ → $y = 1 - 2x^2$（$= -H_2/2$）。

> 答: $a_{n+2} = 2(n - \lambda)a_n/((n+2)(n+1))$ → $\lambda = n$ 時停止 / $\lambda = 2$ → $y = 1 - 2x^2$（埃爾米特 H_2 的常數倍）

弗羅貝尼烏斯法

4. 半整數階貝索

- $y = \Sigma\, a_n x^{n+r}$：指標方程 $r^2 - 1/4 = 0$ → $r = \pm 1/2$。
- $r = 1/2$ 得 $x^{1/2}(1 - x^2/3! + x^4/5! - \cdots) = \sin x/\sqrt{x}$，$r = -1/2$ 得 $\cos x/\sqrt{x}$。
- 初始值對應 $y = \sin x/\sqrt{x}$（在 $\pi/2$ 約 0.798, -0.254）。
- 零點在 $\sin x = 0$ 處：$x = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$（振幅像 $1/\sqrt{x}$ 一樣衰減）。

> 答: $r^2 - 1/4 = 0$ → $r = \pm 1/2$ / $y = \sin x/\sqrt{x}$，零點 $x = \pi, 2\pi, 3\pi$

5. 根為 0 與 1/2

- 指標方程 $4r(r-1)+2r=2r(2r-1)=0 \to r=0, 1/2$。
- $r=0$：$1-x/2!+x^2/4!-\cdots=\cos\sqrt{x}$；$r=1/2$：$\sqrt{x}-x^{3/2}/3!+\cdots=\sin\sqrt{x}$。
- 由初始值得 $y=\cos\sqrt{x}$。
- 第一個零點 $\sqrt{x}=\pi/2 \to x=\pi^2/4\approx 2.47$。

> 答: $4r(r-1)+2r=0 \to r=0, 1/2$ / $y=\cos\sqrt{x}$（另一個 $\sin\sqrt{x}$），第一個零點 $x=\pi^2/4\approx 2.47$

6. 氫原子

- 指標方程 $r^2=0 \to r=0$（重根）；第二個解含 $\ln x$。
- $y=\Sigma\, a_k\, x\text{^}k$：$(k+1)^2 a_{k+1}=(k-n)a_k$。
- n 為整數時級數在 $x\text{^}n$ 停止（拉蓋爾多項式）。
- $n=2$：$a_1=-2, a_2=1/2 \to y=1-2x+x^2/2$，零點 $x=2\pm\sqrt{2}\approx 0.59, 3.41$。

> 答: $a_{k+1}=(k-n)a_k/(k+1)^2 \to n$ 為整數時停止 / $n=2$：$y=1-2x+x^2/2$，零點 $2\pm\sqrt{2}$

貝索函數與勒讓德函數

7. 圓鼓的振動

- 關於 kx 的零階貝索方程：$y=J_0(kx)$（Y_0 在中心發散）。
- 邊緣固定：$J_0(k)=0 \to k_1=2.405, k_2=5.520, k_3=8.654$。
- 頻率 $\propto k$，所以 $\omega_2/\omega_1=5.520/2.405\approx 2.30$。
- 不是整數比，所以鼓聽起來不如弦樂器「有音高」。

> 答: $y=J_0(kx)$；$y(1)=0 \to k=2.405$（J_0 的第一個零點） / 下一個 $k=5.520 \to$ 頻率比 ≈ 2.30（不是倍音）

8. 擺動的鏈條

- 令 $s=2\sqrt{(\lambda x)}$，方程變成零階貝索方程：$y=J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$。
- 在 $x=0$ 有限，所以排除 Y_0；且 $y'(0)=-\lambda$。
- $y(1)=0 \to 2\sqrt{\lambda}=2.405 \to \lambda=(2.405/2)^2\approx 1.446$。
- 長度 L 的鏈條頻率 $\omega=\sqrt{(\lambda g/L)}$。

> 答: $y=J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$ / $y(1)=0 \to 2\sqrt{\lambda}=2.405 \to \lambda\approx 1.446$

9. 球的電位

- 級數解：$a_{k+2}=(k-n)(k+n+1)a_k/((k+2)(k+1))$；$n$ 不是整數時在 $x=\pm 1$ 發散。
- 整數 n：級數停止成為勒讓德多項式；$P_2=(3x^2-1)/2$。
- $\cos^2\theta=1/3+(2/3)P_2(\cos\theta) \to V=1/3+(2/3)r^2P_2(\cos\theta)$。
- 球心 $r=0$：$V=1/3$（球面上的平均值）。

> 答: 只有整數 n 時級數才停止 $\to P_n(x)$ / $\cos^2\theta=(1/3)P_0+(2/3)P_2 \to V=1/3+(2/3)r^2P_2$，球心 1/3