급수해 활용 문제

SnackLab 연습문제 · 미분방정식의 급수해 · 활용 문제 9개와 풀이 · snacklab.dev

SnackLab이 직접 만든 연습문제입니다. 멱급수해, 프로베니우스 방법, 베셀 함수와 르장드르 함수를 주제별로 구성했고, 모든 답은 기호 계산이나 수치 계산으로 검산했습니다. 각 문제는 SnackLab 숏츠에서 그래프로 풀이하며, SnackLab 앱의 d/dx 모드로 직접 확인할 수 있습니다.

멱급수해

1. 굴절률이 변하는 층의 빛. 굴절률이 x에 비례해 변하는 층에서 파동의 진폭은 에어리 방정식 $y'' = xy$를 따르고, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$이다. $x = 0$ 주위의 멱급수해를 구하고, 세 항으로 $y(1)$을 어림한 뒤, $x < 0$에서 첫 영점의 위치를 구하여라.

2. 퍼져 나가는 열 펄스. 퍼져 나가는 열 펄스의 모양이 $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$을 만족한다. 멱급수해를 구하고 닫힌 꼴로 나타낸 뒤 $y(1)$을 계산하여라.

3. 양자 조화 진동자. 양자 조화 진동자에서 에르미트 방정식 $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$이 나온다. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$일 때 급수 계수의 점화식을 구하고, λ가 짝수 정수일 때만 급수가 끝남을 보인 뒤, $\lambda = 2$일 때의 해를 구하여라.

프로베니우스 방법

4. 반정수 차수 베셀. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$을 프로베니우스 방법으로 풀어라. 결정방정식의 근과, $y(\pi/2) = \sqrt{(2/\pi)}$, $y'(\pi/2) = -(1/2)(2/\pi)^{3/2}$을 만족하는 해를 구하고 그 영점을 구하여라.

5. 근이 0과 1/2. $4xy'' + 2y' + y = 0$에 프로베니우스 방법을 써서 결정방정식의 근, 두 급수해의 닫힌 꼴, 그리고 $y(1) = \cos 1$, $y'(1) = -(\sin 1)/2$를 만족하는 해를 구하여라. 첫 영점은 어디인가?

6. 수소 원자. 수소 원자의 지름 방향 부분에서 라게르 방정식 $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$이 나온다. $x = 0$이 결정방정식의 중근을 갖는 정칙 특이점임을 보이고, $y(0) = 1$인 정칙해의 점화식을 구한 뒤, $n = 2$일 때의 다항식과 영점을 구하여라.

베셀 함수와 르장드르 함수

7. 북의 진동. 반지름 1인 원형 북의 지름 방향 모양은 $y'' + y'/x + k^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$을 따르고 테두리는 고정되어 $y(1) = 0$이다. 처음 두 모드의 k 값과 진동수의 비를 구하여라.

8. 흔들리는 사슬. 길이 1인 매달린 사슬의 작은 흔들림(x는 자유단에서 위로 잰 거리)은 $xy'' + y' + \lambda y = 0$을 따른다. 꼭대기 $x = 1$은 고정($y(1) = 0$)이고 자유단은 유한하다($y(0) = 1$). $s = 2\sqrt{(\lambda x)}$로 치환해 풀고 가장 작은 λ를 구하여라.

9. 구의 전위. 반지름 1인 구의 표면 전위가 $V = \cos^2\theta$이다. 내부에서 $V = \Sigma\, c_n r^n P_n(\cos\theta)$이고 P_n은 르장드르 방정식 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$의 해이다. n이 정수여야 하는 이유를 설명하고, $\cos^2\theta$를 르장드르 다항식으로 전개한 뒤 중심의 전위를 구하여라.

풀이

멱급수해

1. 굴절률이 변하는 층의 빛

- $y = \Sigma\, a_n x^n$을 대입하면 $\Sigma\,(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \Sigma\, a_{n-1}x^n$이고 $a_2 = 0$이다.
- 점화식 $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1))$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$에서 $a_3 = 1/6$, $a_6 = 1/180$, $a_9 = 1/12960$.
- $y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + x^9/12960 + \cdots$; $y(1) \approx 1 + 0.1667 + 0.0056 = 1.1722$ (정확한 값 1.1723).
- $x > 0$에서는 증가하고 $x < 0$에서는 진동한다. 첫 영점 $x \approx -1.99$.

> 답: $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1)) \to y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + \cdots$ / $y(1) \approx 1.1722$ (세 항만으로 1.1722), 첫 영점 $x \approx -1.99$

2. 퍼져 나가는 열 펄스

- $y = \Sigma\, a_n x^n$: $(n+2)(n+1)a_{n+2} + n\,a_n + a_n = 0$.
- 따라서 $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$; $a_2 = -1/2$, $a_4 = 1/8$, $a_6 = -1/48$, 홀수 항은 0.
- $y = \Sigma\,(-1)^k\, x^{2k}/(2^k k!) = e^{-x^2/2}$.
- $y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$.

> 답: $a_{n+2} = -a_n/(n+2) \to y = 1 - x^2/2 + x^4/8 - x^6/48 + \cdots$ / $y = e^{-x^2/2}$, $y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$

3. 양자 조화 진동자

- $y = \Sigma\, a_n x^n$: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n\,a_n + 2\lambda\,a_n = 0$.
- $a_{n+2} = 2(n - \lambda)a_n/((n+2)(n+1))$.
- 짝수 항만 있으므로 어떤 짝수 n에 대해 $\lambda = n$일 때 급수가 끝난다. 그렇지 않으면 e^{x^2}처럼 커진다.
- $\lambda = 2$: $a_2 = -2$, $a_4 = 0 \to y = 1 - 2x^2$ ($= -H_2/2$).

> 답: $a_{n+2} = 2(n - \lambda)a_n/((n+2)(n+1)) \to \lambda = n$이면 끝남 / $\lambda = 2 \to y = 1 - 2x^2$ (에르미트 H_2의 상수배)

프로베니우스 방법

4. 반정수 차수 베셀

- $y = \Sigma\, a_n x^{n+r}$: 결정방정식 $r^2 - 1/4 = 0 \to r = \pm 1/2$.
- $r = 1/2$에서 $x^{1/2}(1 - x^2/3! + x^4/5! - \cdots) = \sin x/\sqrt{x}$, $r = -1/2$에서 $\cos x/\sqrt{x}$.
- 초깃값은 $y = \sin x/\sqrt{x}$와 맞는다 ($\pi/2$에서 ≈ 0.798, -0.254).
- 영점은 $\sin x = 0$인 $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ (진폭은 $1/\sqrt{x}$처럼 줄어든다).

> 답: $r^2 - 1/4 = 0 \to r = \pm 1/2$ / $y = \sin x/\sqrt{x}$, 영점 $x = \pi, 2\pi, 3\pi$

5. 근이 0과 1/2

- 결정방정식 $4r(r-1)+2r=2r(2r-1)=0 \to r=0, 1/2$.
- $r=0$: $1 - x/2! + x^2/4! - \cdots = \cos\sqrt{x}$; $r=1/2$: $\sqrt{x} - x^{3/2}/3! + \cdots = \sin\sqrt{x}$.
- 초깃값에서 $y=\cos\sqrt{x}$.
- 첫 영점 $\sqrt{x}=\pi/2 \to x=\pi^2/4 \approx 2.47$.

> 답: $4r(r-1)+2r=0 \to r=0, 1/2$ / $y=\cos\sqrt{x}$ (다른 해 $\sin\sqrt{x}$), 첫 영점 $x=\pi^2/4 \approx 2.47$

6. 수소 원자

- 결정방정식 $r^2=0 \to r=0$ (중근); 두 번째 해에는 ln x가 들어간다.
- $y=\Sigma\, a_k\, x\text{^}k$: $(k+1)^2 a_{k+1}=(k-n)a_k$.
- 정수 n이면 급수가 x^n에서 끝난다 (라게르 다항식).
- $n=2$: $a_1=-2$, $a_2=1/2 \to y=1-2x+x^2/2$, 영점 $x=2\pm\sqrt{2} \approx 0.59, 3.41$.

> 답: $a_{k+1}=(k-n)a_k/(k+1)^2 \to$ n이 정수이면 끝남 / $n=2$: $y=1-2x+x^2/2$, 영점 $2\pm\sqrt{2}$

베셀 함수와 르장드르 함수

7. 북의 진동

- kx에 대한 0차 베셀 방정식: $y=J_0(kx)$ (Y_0는 중심에서 발산).
- 고정된 테두리: $J_0(k)=0 \to k_1=2.405$, $k_2=5.520$, $k_3=8.654$.
- 진동수 $\propto k$이므로 $\omega_2/\omega_1=5.520/2.405 \approx 2.30$.
- 정수비가 아니어서 북은 현보다 덜 "음악적"으로 들린다.

> 답: $y=J_0(kx)$; $y(1)=0 \to k=2.405$ (J_0의 첫 영점) / 다음 $k=5.520 \to$ 진동수 비 ≈ 2.30 (배음이 아님)

8. 흔들리는 사슬

- $s=2\sqrt{(\lambda x)}$로 바꾸면 0차 베셀 방정식: $y=J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$.
- $x=0$에서 유한하므로 Y_0는 제외; 또 $y'(0)=-\lambda$.
- $y(1)=0 \to 2\sqrt{\lambda}=2.405 \to \lambda=(2.405/2)^2 \approx 1.446$.
- 길이 L인 사슬의 진동수는 $\omega=\sqrt{(\lambda g/L)}$.

> 답: $y=J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$ / $y(1)=0 \to 2\sqrt{\lambda}=2.405 \to \lambda \approx 1.446$

9. 구의 전위

- 급수해: $a_{k+2}=(k-n)(k+n+1)a_k/((k+2)(k+1))$; n이 정수가 아니면 $x=\pm1$에서 발산한다.
- 정수 n: 급수가 끝나 르장드르 다항식이 된다; $P_2=(3x^2-1)/2$.
- $\cos^2\theta=1/3+(2/3)P_2(\cos\theta) \to V=1/3+(2/3)r^2P_2(\cos\theta)$.
- 중심 $r=0$: $V=1/3$ (구면 위의 평균).

> 답: 정수 n일 때만 급수가 끝남 $\to P_n(x)$ / $\cos^2\theta=(1/3)P_0+(2/3)P_2 \to V=1/3+(2/3)r^2P_2$, 중심 1/3