級数解の応用問題

SnackLab 演習問題・微分方程式の級数解・応用問題 9 問と解答・snacklab.dev

SnackLab オリジナルの演習問題です。べき級数解、フロベニウス法、ベッセル関数とルジャンドル関数をテーマ別に並べ、すべての答えは記号計算または数値計算で検算しました。各問題は SnackLab のショート動画でグラフを使って解説しており、SnackLab アプリの d/dx モードで確かめられます。

べき級数解

1. 屈折率が変わる層の光　屈折率が x に比例して変わる層では、波の振幅がエアリー方程式 $y'' = xy$ に従い、$y(0) = 1, y'(0) = 0$ である。$x = 0$ のまわりのべき級数解を求め、3 項で $y(1)$ を見積もり、$x < 0$ での最初の零点を求めよ。

2. 広がる熱パルス　広がる熱パルスの形が $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たす。べき級数解を求めて閉じた形で表し、$y(1)$ を計算せよ。

3. 量子調和振動子　量子調和振動子からエルミート方程式 $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$ が得られる。$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ のとき係数の漸化式を求め、λ が偶数の整数のときだけ級数が止まることを示し、$\lambda = 2$ の解を求めよ。

フロベニウス法

4. 半整数次のベッセル　$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ をフロベニウス法で解け。決定方程式の根と、$y(\pi/2) = \sqrt{(2/\pi)}$, $y'(\pi/2) = -(1/2)(2/\pi)^{3/2}$ を満たす解を求め、その零点を答えよ。

5. 根が 0 と 1/2　$4xy'' + 2y' + y = 0$ にフロベニウス法を使い、決定方程式の根、2 つの級数解の閉じた形、$y(1) = \cos 1$, $y'(1) = -(\sin 1)/2$ を満たす解を求めよ。最初の零点はどこか。

6. 水素原子　水素原子の動径部分からラゲール方程式 $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$ が得られる。$x = 0$ が決定方程式の重根をもつ確定特異点であることを示し、$y(0) = 1$ の正則解の漸化式を求め、$n = 2$ の多項式とその零点を求めよ。

ベッセル関数とルジャンドル関数

7. 太鼓の振動　半径 1 の円形の太鼓の動径方向の形は $y'' + y'/x + k^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ に従い、縁は固定されて $y(1) = 0$ である。最初の 2 つのモードの k と振動数の比を求めよ。

8. 揺れる鎖　長さ 1 の吊るした鎖の小さな揺れ（x は自由端から上向きに測る）は $xy'' + y' + \lambda y = 0$ に従う。上端 $x = 1$ は固定（$y(1) = 0$）、自由端は有限（$y(0) = 1$）。$s = 2\sqrt{(\lambda x)}$ と置換して解き、最小の λ を求めよ。

9. 球の電位　半径 1 の球の表面電位が $V = \cos^2\theta$ である。内部では $V = \Sigma\, c_n r^n P_n(\cos\theta)$ で、P_n はルジャンドル方程式 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ の解である。n が整数でなければならない理由を説明し、$\cos^2\theta$ をルジャンドル多項式で展開して中心の電位を求めよ。

解答

べき級数解

1. 屈折率が変わる層の光

- $y = \Sigma\, a_n x^n$ を代入すると $\Sigma\,(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \Sigma\, a_{n-1}x^n$、$a_2 = 0$。
- 漸化式 $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1))$；$a_0 = 1$, $a_1 = 0$ から $a_3 = 1/6$, $a_6 = 1/180$, $a_9 = 1/12960$。
- $y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + x^9/12960 + \cdots$；$y(1) \approx 1 + 0.1667 + 0.0056 = 1.1722$（真値 1.1723）。
- $x > 0$ では増加し、$x < 0$ では振動する。最初の零点 $x \approx -1.99$。

> 答: $a_{n+2} = a_{n-1}/((n+2)(n+1))$ → $y = 1 + x^3/6 + x^6/180 + \cdots$ / $y(1) \approx 1.1722$（3 項で 1.1722）、最初の零点 $x \approx -1.99$

2. 広がる熱パルス

- $y = \Sigma\, a_n x^n$：$(n+2)(n+1)a_{n+2} + n\,a_n + a_n = 0$。
- よって $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$；$a_2 = -1/2$, $a_4 = 1/8$, $a_6 = -1/48$、奇数項は 0。
- $y = \Sigma\,(-1)^k x^{2k}/(2^k k!) = e^{-x^2/2}$。
- $y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$。

> 答: $a_{n+2} = -a_n/(n+2)$ → $y = 1 - x^2/2 + x^4/8 - x^6/48 + \cdots$ / $y = e^{-x^2/2}$、$y(1) = e^{-1/2} \approx 0.607$

3. 量子調和振動子

- $y = \Sigma\, a_n x^n$：$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n\,a_n + 2\lambda\,a_n = 0$。
- $a_{n+2} = 2(n-\lambda)a_n/((n+2)(n+1))$。
- 偶数項だけなので、ある偶数 n で $\lambda = n$ のとき級数が止まる。そうでなければ e^{x^2} のように増える。
- $\lambda = 2$：$a_2 = -2$, $a_4 = 0$ → $y = 1 - 2x^2$（$= -H_2/2$）。

> 答: $a_{n+2} = 2(n-\lambda)a_n/((n+2)(n+1))$ → $\lambda = n$ で止まる / $\lambda = 2$ → $y = 1 - 2x^2$（エルミート H_2 の定数倍）

フロベニウス法

4. 半整数次のベッセル

- $y = \Sigma\, a_n x^{n+r}$：決定方程式 $r^2 - 1/4 = 0$ → $r = \pm 1/2$。
- $r = 1/2$ から $x^{1/2}(1 - x^2/3! + x^4/5! - \cdots) = \sin x/\sqrt{x}$、$r = -1/2$ から $\cos x/\sqrt{x}$。
- 初期値は $y = \sin x/\sqrt{x}$ に一致する（$\pi/2$ で $\approx 0.798, -0.254$）。
- 零点は $\sin x = 0$ の $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$（振幅は $1/\sqrt{x}$ のように減る）。

> 答: $r^2 - 1/4 = 0$ → $r = \pm 1/2$ / $y = \sin x/\sqrt{x}$、零点 $x = \pi, 2\pi, 3\pi$

5. 根が 0 と 1/2

- 決定方程式 $4r(r-1)+2r = 2r(2r-1) = 0 \to r = 0, 1/2$。
- $r = 0$：$1 - x/2! + x^2/4! - \cdots = \cos\sqrt{x}$；$r = 1/2$：$\sqrt{x} - x^{3/2}/3! + \cdots = \sin\sqrt{x}$。
- 初期値から $y = \cos\sqrt{x}$。
- 最初の零点 $\sqrt{x} = \pi/2 \to x = \pi^2/4 \approx 2.47$。

> 答: $4r(r-1)+2r = 0 \to r = 0, 1/2$ / $y = \cos\sqrt{x}$（もう一つは $\sin\sqrt{x}$）、最初の零点 $x = \pi^2/4 \approx 2.47$

6. 水素原子

- 決定方程式 $r^2 = 0 \to r = 0$（重根）；2 つ目の解は $\ln x$ を含む。
- $y = \Sigma\, a_k\, x\text{^}k$：$(k+1)^2 a_{k+1} = (k-n)a_k$。
- 整数 n なら級数は x^n で止まる（ラゲール多項式）。
- $n = 2$：$a_1 = -2$, $a_2 = 1/2 \to y = 1 - 2x + x^2/2$、零点 $x = 2 \pm \sqrt{2} \approx 0.59, 3.41$。

> 答: $a_{k+1} = (k-n)a_k/(k+1)^2 \to$ n が整数なら止まる / $n = 2$：$y = 1 - 2x + x^2/2$、零点 $2 \pm \sqrt{2}$

ベッセル関数とルジャンドル関数

7. 太鼓の振動

- kx についての 0 次ベッセル方程式：$y = J_0(kx)$（Y_0 は中心で発散）。
- 固定された縁：$J_0(k) = 0 \to k_1 = 2.405$, $k_2 = 5.520$, $k_3 = 8.654$。
- 振動数 $\propto k$ なので $\omega_2/\omega_1 = 5.520/2.405 \approx 2.30$。
- 整数比ではないので、太鼓は弦より「音楽的」に聞こえにくい。

> 答: $y = J_0(kx)$；$y(1) = 0 \to k = 2.405$（J_0 の最初の零点） / 次は $k = 5.520 \to$ 振動数の比 ≈ 2.30（倍音ではない）

8. 揺れる鎖

- $s = 2\sqrt{(\lambda x)}$ とすると 0 次ベッセル方程式：$y = J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$。
- $x = 0$ で有限なので Y_0 は除く；また $y'(0) = -\lambda$。
- $y(1) = 0 \to 2\sqrt{\lambda} = 2.405 \to \lambda = (2.405/2)^2 \approx 1.446$。
- 長さ L の鎖の振動数は $\omega = \sqrt{(\lambda g/L)}$。

> 答: $y = J_0(2\sqrt{(\lambda x)})$ / $y(1) = 0 \to 2\sqrt{\lambda} = 2.405 \to \lambda \approx 1.446$

9. 球の電位

- 級数解：$a_{k+2} = (k-n)(k+n+1)a_k/((k+2)(k+1))$；n が整数でなければ $x = \pm 1$ で発散する。
- 整数 n：級数が止まりルジャンドル多項式になる；$P_2 = (3x^2 - 1)/2$。
- $\cos^2\theta = 1/3 + (2/3)P_2(\cos\theta) \to V = 1/3 + (2/3)r^2 P_2(\cos\theta)$。
- 中心 $r = 0$：$V = 1/3$（球面上の平均）。

> 答: 整数 n のときだけ級数が止まる → $P_n(x)$ / $\cos^2\theta = (1/3)P_0 + (2/3)P_2 \to V = 1/3 + (2/3)r^2 P_2$、中心 1/3