高階微分方程應用題

SnackLab 練習題 • 高階微分方程 • 18 題應用題與詳解 • snacklab.dev

這是 SnackLab 自製的練習題，從常係數微分方程、非齊次微分方程、彈簧與電路、非線性微分方程、邊界值問題到線性微分方程組依主題編排，所有答案都經過符號或數值驗算。每一題都在 SnackLab 短影片中用圖形解說，也可以用 SnackLab App 的 d/dx 模式自己確認。

常係數微分方程

1. 自動閉門器　液壓式自動閉門器滿足 $\theta'' + 5\theta' + 6\theta = 0$，其中 $\theta(t)$ 為門的開啟角度（rad）。門在 $\theta(0) = 1.2$ 由靜止釋放。求 $\theta(t)$，並判斷門是否會越過關閉位置 $\theta = 0$。

2. 大樓的晃動　高樓頂部受突來的陣風推動，依 $x'' + 2x' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$ 運動。求 $x(t)$、最大位移及其發生的時刻。

3. 同心球間的電位　兩同心球之間的電位滿足柯西–歐拉方程 $r^2V'' + 2rV' = 0$。內球（$r = 1$）維持在 4 V，外球（$r = 2$）接地。求 $V(r)$。

非齊次微分方程

4. 在油中下沉的珠子　小珠子由靜止釋放，在油中下沉，所受阻力與速度成正比：$y'' = 2 - 2y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$（單位已換算，y 以向下為正）。求 $y(t)$、$t = 4$ 時的深度及終端速度。

5. 橋上的行進　固有頻率為 3 的人行橋橋面受頻率 2 的行進驅動：$x'' + 9x = 4\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。求 $x(t)$ 及其最大位移。

6. 漸弱的陣風與鞦韆　靜止的鞦韆受一陣力量逐漸衰減的風推動：$x'' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。求 $x(t)$ 及 t 很大時運動的振幅。

彈簧與電路

7. 汽車懸吊　汽車車輪組件（質量 1）裝在彈簧常數 16 的彈簧上，並配有阻尼係數 c 的避震器：$x'' + cx' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$（位移已換算）。求臨界阻尼值及此時的運動。

8. 洗衣機共振　不平衡的洗衣機滾筒恰以固有頻率驅動機架：$x'' + 25x = 2\cos 5t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。求 $x(t)$ 並描述其運動。

9. RLC 電路充電　$L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = 1/25$ F 的串聯 RLC 電路接上 50 V 電池：$q'' + 6q' + 25q = 50$, $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$。求 $q(t)$、穩態值及第一個峰值。

非線性微分方程

10. 擺幅越大越慢　擺長 1 m 的單擺滿足 $\theta'' = -9.8 \sin\theta$。比較分別在 $\theta(0) = 0.3$ 與 $\theta(0) = 2$ 由靜止釋放時的週期。

11. 下垂的纜線　因自身重量下垂的柔軟纜線滿足 $y'' = 0.5\sqrt{1 + (y')^2}$，最低點為 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$。求形狀 $y(x)$ 及 $x = 4$ 處的高度。

12. 脫離速度　以換算單位表示，從地球垂直發射的物體滿足 $y'' = -1/(1+y)^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v$。比較 $v = 1.2$ 與 $v = 1.5$，並求脫離速度。

邊界值問題

13. 柱的挫曲　長度 1 的細柱受軸向載重 λ，滿足 $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$。求有非零解的 λ 值及最小的（臨界）載重。

14. 下垂的電纜　架在 $x = 0$ 與 $x = 4$ 兩根柱子之間、受均勻載重的電纜滿足 $y'' = 0.2$, $y(0) = 0$, $y(4) = 0$。求 $y(x)$、初始斜率及最大下垂量。（打靶法：試幾個不同的初始斜率。）

15. 散熱鰭片　長度 1 的散熱鰭片滿足 $\theta'' = \theta$（已換算），其中 θ 為超出溫度除以根部的值：$\theta(0) = 1$，尖端絕熱：$\theta'(1) = 0$。求 $\theta(x)$、所需斜率 $\theta'(0)$ 及尖端的值。

線性微分方程組

16. 軍備競賽　在理查森軍備競賽模型 $x' = -x + 2y$, $y' = 2x - y$ 中，求特徵值、判斷原點的類型，並描述從 $x(0) = 1$, $y(0) = 0.5$ 出發的情形。

17. 兩個房間降溫　兩個相連的房間向室外散熱：$x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$（高於室外的溫度）。當 $x(0) = 20$, $y(0) = 0$ 時，求 x, y 及房間 B 的最高溫度。

18. LC 電路　$L = 1$ H, $C = 1/4$ F 的 LC 電路給出方程組 $q' = i$, $i' = -4q$，$q(0) = 1$, $i(0) = 0$。描述 q–i 平面上的軌跡，並求週期與最大電流。

詳解

常係數微分方程

1. 自動閉門器

- 特徵方程 $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$。
- $\theta = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$；$\theta(0) = 1.2$, $\theta'(0) = 0 \to c_1 = 3.6$, $c_2 = -2.4$。
- 對所有 $t \geq 0$，$\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} = e^{-3t}(3.6e^{t} - 2.4) > 0$。
- 過阻尼：門緩緩關上，不會越過 $\theta = 0$。

> 答: $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$（相異兩實根） / $\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} > 0$ → 不會衝過

2. 大樓的晃動

- $m^2 + 2m + 1 = 0 \to m = -1$（重根）。
- $x = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$；$x(0) = 0 \to c_1 = 0$；$x'(0) = 3 \to c_2 = 3$。
- $x = 3te^{-t}$；$t = 1$ 時 $x' = 3(1 - t)e^{-t} = 0$。
- 最大位移 $3/e \approx 1.10$（臨界阻尼，不振盪）。

> 答: $m = -1$（重根）→ $x = 3te^{-t}$ / $t = 1$ 時 $x' = 0$ → 最大 $x = 3/e \approx 1.10$

3. 同心球間的電位

- 令 $V = r^m$：$m(m - 1) + 2m = m(m + 1) = 0 \to m = 0, -1$。
- $V = c_1 + c_2/r$。
- $V(1) = 4$, $V(2) = 0 \to c_2 = 8$, $c_1 = -4$。
- $V = 8/r - 4$；例如 $V(1.5) \approx 1.33$ V。（視為初值問題：$V'(1) = -8$。）

> 答: $V = r^m \to m(m - 1) + 2m = 0 \to m = 0, -1$ / $V = 8/r - 4$（$V(1.5) \approx 1.33$ V）

非齊次微分方程

4. 在油中下沉的珠子

- 齊次方程：$m^2 + 2m = 0 \to y_c = c_1 + c_2 e^{-2t}$。
- 外力為常數且 $m = 0$ 是根 → 設 $y_p = At$：$2A = 2 \to A = 1$。
- $y = t - (1 - e^{-2t})/2$。
- $y(4) \approx 3.50$；終端速度 $y' \to 1$。

> 答: $y_p = t$（待定係數法） / $y = t - (1 - e^{-2t})/2$，$y(4) \approx 3.50$，速度 → 1

5. 橋上的行進

- $y_c = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$；設 $x_p = A\cos 2t$：$5A = 4 \to A = 4/5$。
- $x(0) = 0 \to c_1 = -4/5$；$x'(0) = 0 \to c_2 = 0$。
- $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$。
- $t = \pi$ 時 $\cos 2\pi = 1, \cos 3\pi = -1 \to x = 1.6$，為可能的最大值。

> 答: $x_p = (4/5)\cos 2t$ / $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$，$t = \pi$ 時最大 $|x| = 1.6$

6. 漸弱的陣風與鞦韆

- $y_c = c_1\cos t + c_2\sin t$；設 $x_p = Ae^{-t}$：$2A = 1 \to A = 1/2$。
- $x(0) = 0 \to c_1 = -1/2$；$x'(0) = 0 \to c_2 = 1/2$。
- $x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$。
- t 很大時 $x \approx (\sin t - \cos t)/2 = (\sqrt{2}/2)\sin(t - \pi/4)$：振幅 ≈ 0.71。

> 答: $x_p = e^{-t}/2$，$x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$ / $e^{-t} \to 0$，只剩振幅 $\sqrt{2}/2 \approx 0.71$

彈簧與電路

7. 汽車懸吊

- $m^2 + cm + 16 = 0$ 有重根的條件為 $c^2 - 64 = 0 \to c = 8$。
- 此時 $m = -4$（重根）：$x = (c_1 + c_2 t)e^{-4t}$。
- $x(0) = 1, x'(0) = 0 \to x = (1 + 4t)e^{-4t}$。
- $c < 8$：欠阻尼（會彈跳）；$c > 8$：過阻尼（回復較慢）。

> 答: 臨界阻尼：$c^2 = 4 \cdot 16 \to c = 8$ / $x = (1 + 4t)e^{-4t}$；$c < 8$ 會彈跳，$c > 8$ 回得慢

8. 洗衣機共振

- $y_c = c_1\cos 5t + c_2\sin 5t$；$\cos 5t$ 已在 y_c 中 → 設 $x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$。
- 代入得 $10B = 2, A = 0 \to x_p = (t\sin 5t)/5$。
- 由初始條件得 $c_1 = c_2 = 0$：$x = (t\sin 5t)/5$。
- 純共振：振幅 $t/5$ 無限增大。

> 答: 共振：設 $x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$ / $x = (t\sin 5t)/5$ → 振幅像 $t/5$ 一樣不斷變大

9. RLC 電路充電

- $m^2 + 6m + 25 = 0 \to m = -3 \pm 4i$（欠阻尼）。
- $q_p = 50/25 = 2$。
- $q(0) = 0, q'(0) = 0 \to q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$。
- $q \to 2$ C；第一個峰值在 $t = \pi/4$：$q \approx 2.19$ C。

> 答: $m = -3 \pm 4i$，$q_p = 2$ / $q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$，峰值 ≈ 2.19

非線性微分方程

10. 擺幅越大越慢

- θ 很小時 $\sin\theta \approx \theta$：$\theta'' = -9.8\theta$，週期 $2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s。
- 非線性週期為 $T = 4K(\sin(\theta_0/2))/\sqrt{9.8}$。
- $\theta_0 = 0.3$：$T \approx 2.02$ s；$\theta_0 = 2$：$T \approx 2.67$ s。
- 與線性彈簧不同，單擺的週期與振幅有關。

> 答: 小擺幅：$\sin\theta \approx \theta \to T \approx 2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s / 大擺幅 $\theta_0 = 2$：$T \approx 2.67$ s（週期變長）

11. 下垂的纜線

- 不含 y：令 $u = y'$，則 $u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)}$。
- 分離變數：$\text{arcsinh}\, u = x/2 \to u = \sinh(x/2)$。
- 積分：$y = 2\cosh(x/2) + C$；$y(0) = 2 \to C = 0$。
- 懸鏈線 $y = 2\cosh(x/2)$；$y(4) = 2\cosh 2 \approx 7.52$。

> 答: 令 $u = y'$：$u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)} \to u = \sinh(x/2)$ / $y = 2\cosh(x/2)$（懸鏈線），$y(4) \approx 7.52$

12. 脫離速度

- 乘以 y' 後積分：$y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$（能量）。
- 若 y' 永不為 0 則物體脫離，即 $v^2/2 - 1 \geq 0 \to v \geq \sqrt{2}$。
- $v = 1.2$：$y' = 0$ 時達最高點 $\to 1/(1 + y) = 0.28 \to y \approx 2.57$，之後落回。
- $v = 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.41$：能脫離。

> 答: 能量：$y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$ / $v \geq \sqrt{2} \approx 1.41$ 才能脫離 → 只有 $v = 1.5$

邊界值問題

13. 柱的挫曲

- $\lambda \leq 0$ 時只有 $y = 0$。
- $\lambda = \alpha^2 > 0$ 時 $y = c_2 \sin \alpha x$；$y(1) = 0$ 需 $\sin\alpha = 0 \to \alpha = n\pi$。
- 特徵值 $\lambda_n = n^2\pi^2$，固有函數 $\sin n\pi x$。
- 臨界挫曲載重 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$。

> 答: 只有 $\lambda = n^2\pi^2$ 時有非零解（特徵值） / 臨界載重 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$，形狀 $y = \sin \pi x$

14. 下垂的電纜

- 積分兩次：$y = 0.1x^2 + c_1x + c_2$。
- $y(0) = 0 \to c_2 = 0$；$y(4) = 0 \to 1.6 + 4c_1 = 0 \to c_1 = -0.4$。
- $y = 0.1x(x - 4)$, $y'(0) = -0.4$。
- 最低點 $x = 2$：下垂 0.4。

> 答: $y = 0.1x^2 + c_1x$，$y(4) = 0 \to y'(0) = -0.4$ / $y = 0.1x(x - 4)$，$x = 2$ 時最大下垂 0.4

15. 散熱鰭片

- $\theta = A\cosh(1-x) + B\sinh(1-x)$。
- $\theta'(1) = 0 \to B = 0$；$\theta(0) = 1 \to A = 1/\cosh 1$。
- $\theta = \cosh(1-x)/\cosh 1$, $\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$。
- 尖端：$\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$。

> 答: $\theta = \cosh(1-x)/\cosh 1$，$\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$ / 尖端 $\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$（根部的 64.8%）

線性微分方程組

16. 軍備競賽

- 矩陣 $[[-1, 2], [2, -1]]$：$\lambda = -1 \pm 2 \to 1, -3$。
- $\lambda = 1$ 的特徵向量為 $(1, 1)$，$\lambda = -3$ 的特徵向量為 $(1, -1)$。
- 異號 → 鞍點（不穩定）。
- 凡 $x + y > 0$ 的起點都沿 $(1, 1)$ 增長：競賽升級。

> 答: 特徵值 $1, -3 \to$ 鞍點 / 沿 $(1, 1)$ 方向像 e^t 增長 → 升級

17. 兩個房間降溫

- $\lambda = -1$（向量 $(1, 1)$），$\lambda = -3$（向量 $(1, -1)$）。
- $x = 10e^{-t} + 10e^{-3t}$, $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$。
- $y' = 0 \to e^{2t} = 3 \to t = \ln 3/2 \approx 0.55$。
- $y_{max} \approx 3.85$；之後兩個房間都逐漸降至室外溫度。

> 答: 特徵值 $-1, -3 \to$ 穩定節點 / $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$，$t \approx 0.55$ 時最大 ≈ 3.85

18. LC 電路

- 矩陣 $[[0, 1], [-4, 0]]$：$\lambda = \pm 2i \to$ 中心點。
- $q = \cos 2t$, $i = -2\sin 2t$。
- 軌跡：$q^2 + i^2/4 = 1$（橢圓），週期 $2\pi/2 = \pi$。
- 最大電流 2 A；能量在 C 與 L 之間永不停止地轉移。

> 答: 特徵值 $\pm 2i \to$ 中心點（封閉橢圓） / $q^2 + i^2/4 = 1$：週期 π，最大電流 2