고계 미분방정식 활용 문제

SnackLab 연습문제 · 고계 미분방정식 · 활용 문제 18개와 풀이 · snacklab.dev

SnackLab이 직접 만든 연습문제입니다. 상수계수 미분방정식, 비제차 미분방정식, 스프링과 회로, 비선형 미분방정식, 경곗값 문제, 연립 선형 미분방정식까지 주제별로 구성했고, 모든 답은 기호 계산이나 수치 계산으로 검산했습니다. 각 문제는 SnackLab 숏츠에서 그래프로 풀이하며, SnackLab 앱의 d/dx 모드로 직접 확인할 수 있습니다.

상수계수 미분방정식

1. 도어 클로저. 유압식 도어 클로저는 $\theta'' + 5\theta' + 6\theta = 0$을 따른다. 여기서 $\theta(t)$는 문이 열린 각도(rad)이다. 문을 $\theta(0) = 1.2$에서 정지 상태로 놓을 때, $\theta(t)$를 구하고 문이 닫힌 위치 $\theta = 0$을 지나치는지 판단하여라.

2. 건물의 흔들림. 높은 건물의 꼭대기가 갑작스러운 돌풍을 받아 $x'' + 2x' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$에 따라 움직인다. $x(t)$와 최대 변위, 그리고 그 시각을 구하여라.

3. 두 구 사이의 전위. 두 동심구 사이의 전위는 코시–오일러 방정식 $r^2V'' + 2rV' = 0$을 만족한다. 안쪽 구($r = 1$)는 4 V로 유지되고 바깥 구($r = 2$)는 접지되어 있다. $V(r)$을 구하여라.

비제차 미분방정식

4. 기름 속에 가라앉는 구슬. 정지 상태에서 놓은 작은 구슬이 속도에 비례하는 저항을 받으며 기름 속으로 가라앉는다: $y'' = 2 - 2y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (환산 단위, y는 아래쪽이 양). y(t), t = 4일 때의 깊이, 종단속도를 구하여라.

5. 다리 위 행진. 고유진동수가 3인 보행교 상판이 진동수 2의 행진으로 강제 진동한다: $x'' + 9x = 4\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. x(t)와 최대 변위를 구하여라.

6. 잦아드는 돌풍과 그네. 정지해 있던 그네를 힘이 점점 약해지는 돌풍이 민다: $x'' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. x(t)와 t가 클 때 운동의 진폭을 구하여라.

스프링과 회로

7. 자동차 서스펜션. 자동차 바퀴 어셈블리(질량 1)가 스프링 상수 16인 스프링에 달려 있고, 감쇠 계수 c인 쇼크 업소버가 있다: $x'' + cx' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ (환산 변위). 임계 감쇠 값과 그때의 운동을 구하여라.

8. 세탁기 공진. 불균형한 세탁기 드럼이 프레임을 정확히 고유진동수로 흔든다: $x'' + 25x = 2\cos 5t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. $x(t)$를 구하고 운동을 설명하여라.

9. RLC 회로 충전. $L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = 1/25$ F인 직렬 RLC 회로를 50 V 전지에 연결한다: $q'' + 6q' + 25q = 50$, $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$. $q(t)$, 정상상태, 첫 번째 최댓값을 구하여라.

비선형 미분방정식

10. 크게 흔들면 더 느리다. 길이 1 m인 진자는 $\theta'' = -9.8 \sin\theta$를 따른다. $\theta(0) = 0.3$과 $\theta(0) = 2$에서 각각 정지 상태로 놓았을 때의 주기를 비교하여라.

11. 늘어진 케이블. 자기 무게로 늘어진 유연한 케이블은 $y'' = 0.5\sqrt{1 + (y')^2}$를 만족하고, 최저점에서 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$이다. 모양 $y(x)$와 $x = 4$에서의 높이를 구하여라.

12. 탈출 속도. 환산 단위에서 지구에서 연직으로 발사한 물체는 $y'' = -1/(1 + y)^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = v$를 따른다. $v = 1.2$와 $v = 1.5$를 비교하고 탈출 속도를 구하여라.

경곗값 문제

13. 기둥의 좌굴. 축 방향 하중 λ를 받는 길이 1인 가는 기둥은 $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$을 만족한다. 0이 아닌 해가 존재하는 λ의 값과 가장 작은 (임계) 하중을 구하여라.

14. 처진 케이블. $x = 0$과 $x = 4$에 있는 두 기둥 사이에서 고르게 하중을 받는 케이블은 $y'' = 0.2$, $y(0) = 0$, $y(4) = 0$을 만족한다. $y(x)$, 처음 기울기, 최대 처짐을 구하여라. (슈팅법: 여러 초기 기울기를 시도해 보자.)

15. 냉각 핀. 길이 1인 냉각 핀은 $\theta'' = \theta$ (환산)를 만족한다. 여기서 θ는 초과 온도를 뿌리에서의 값으로 나눈 것으로 $\theta(0) = 1$이고, 끝은 단열되어 $\theta'(1) = 0$이다. $\theta(x)$, 필요한 기울기 $\theta'(0)$, 끝에서의 값을 구하여라.

연립 선형 미분방정식

16. 군비 경쟁. 리처드슨 군비 경쟁 모형 $x' = -x + 2y$, $y' = 2x - y$에서 고윳값을 구하고 원점을 분류한 뒤, $x(0) = 1$, $y(0) = 0.5$에서 출발하면 어떻게 되는지 설명하여라.

17. 두 방의 냉각. 연결된 두 방이 바깥으로 열을 잃는다: $x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$ (바깥 기온보다 높은 온도). $x(0) = 20$, $y(0) = 0$일 때 x, y와 방 B의 최고 온도를 구하여라.

18. LC 회로. $L = 1$ H, $C = 1/4$ F인 LC 회로는 연립방정식 $q' = i$, $i' = -4q$, $q(0) = 1$, $i(0) = 0$을 준다. q–i 평면에서의 궤적을 설명하고, 주기와 최대 전류를 구하여라.

풀이

상수계수 미분방정식

1. 도어 클로저

- 특성방정식 $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$.
- $\theta = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$; $\theta(0) = 1.2$, $\theta'(0) = 0 \to c_1 = 3.6$, $c_2 = -2.4$.
- 모든 $t \geq 0$에서 $\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} = e^{-3t}(3.6e^{t} - 2.4) > 0$.
- 과감쇠: 문은 $\theta = 0$을 지나치지 않고 천천히 닫힌다.

> 답: $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$ (서로 다른 두 실근) / $\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} > 0$ → 지나치지 않음

2. 건물의 흔들림

- $m^2 + 2m + 1 = 0 \to m = -1$ (중근).
- $x = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$; $x(0) = 0 \to c_1 = 0$; $x'(0) = 3 \to c_2 = 3$.
- $x = 3te^{-t}$; $t = 1$에서 $x' = 3(1 - t)e^{-t} = 0$.
- 최대 변위 $3/e \approx 1.10$ (임계 감쇠, 진동 없음).

> 답: $m = -1$ (중근) → $x = 3te^{-t}$ / $t = 1$에서 $x' = 0 \to$ 최대 $x = 3/e \approx 1.10$

3. 두 구 사이의 전위

- $V = r^m$을 대입하면 $m(m - 1) + 2m = m(m + 1) = 0 \to m = 0, -1$.
- $V = c_1 + c_2/r$.
- $V(1) = 4$, $V(2) = 0 \to c_2 = 8$, $c_1 = -4$.
- $V = 8/r - 4$; 예를 들어 $V(1.5) \approx 1.33$ V. (초깃값 문제로 보면 $V'(1) = -8$.)

> 답: $V = r^m \to m(m - 1) + 2m = 0 \to m = 0, -1$ / $V = 8/r - 4$ ($V(1.5) \approx 1.33$ V)

비제차 미분방정식

4. 기름 속에 가라앉는 구슬

- 제차방정식: $m^2 + 2m = 0 \to y_c = c_1 + c_2 e^{-2t}$.
- 강제항이 상수이고 $m = 0$이 근이므로 $y_p = At$로 놓는다: $2A = 2 \to A = 1$.
- $y = t - (1 - e^{-2t})/2$.
- $y(4) \approx 3.50$; 종단속도 $y' \to 1$.

> 답: $y_p = t$ (미정계수법) / $y = t - (1 - e^{-2t})/2$, $y(4) \approx 3.50$, 속도 $\to 1$

5. 다리 위 행진

- $y_c = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$; $x_p = A\cos 2t$로 놓으면 $5A = 4 \to A = 4/5$.
- $x(0) = 0 \to c_1 = -4/5$; $x'(0) = 0 \to c_2 = 0$.
- $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$.
- $t = \pi$에서 $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1 \to x = 1.6$으로, 가능한 최댓값이다.

> 답: $x_p = (4/5)\cos 2t$ / $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$, $t = \pi$에서 최대 $|x| = 1.6$

6. 잦아드는 돌풍과 그네

- $y_c = c_1\cos t + c_2\sin t$; $x_p = Ae^{-t}$로 놓으면 $2A = 1 \to A = 1/2$.
- $x(0) = 0 \to c_1 = -1/2$; $x'(0) = 0 \to c_2 = 1/2$.
- $x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$.
- t가 크면 $x \approx (\sin t - \cos t)/2 = (\sqrt{2}/2)\sin(t - \pi/4)$: 진폭 ≈ 0.71.

> 답: $x_p = e^{-t}/2$, $x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$ / $e^{-t} \to 0$이므로 진폭 $\sqrt{2}/2 \approx 0.71$만 남음

스프링과 회로

7. 자동차 서스펜션

- $m^2 + cm + 16 = 0$이 중근을 가질 조건은 $c^2 - 64 = 0 \to c = 8$.
- 이때 $m = -4$ (중근): $x = (c_1 + c_2 t)e^{-4t}$.
- $x(0) = 1$, $x'(0) = 0 \to x = (1 + 4t)e^{-4t}$.
- $c < 8$: 부족 감쇠(출렁임); $c > 8$: 과감쇠(느리게 복귀).

> 답: 임계 감쇠: $c^2 = 4 \cdot 16 \to c = 8$ / $x = (1 + 4t)e^{-4t}$; $c < 8$이면 출렁, $c > 8$이면 느릿

8. 세탁기 공진

- $y_c = c_1\cos 5t + c_2\sin 5t$; $\cos 5t$가 이미 y_c에 있으므로 $x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$로 놓는다.
- 대입하면 $10B = 2$, $A = 0 \to x_p = (t\sin 5t)/5$.
- 초기 조건에서 $c_1 = c_2 = 0$: $x = (t\sin 5t)/5$.
- 순수 공진: 진폭 $t/5$가 한없이 커진다.

> 답: 공진: $x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$로 놓는다 / $x = (t\sin 5t)/5 \to$ 진폭이 $t/5$처럼 계속 커짐

9. RLC 회로 충전

- $m^2 + 6m + 25 = 0 \to m = -3 \pm 4i$ (부족 감쇠).
- $q_p = 50/25 = 2$.
- $q(0) = 0$, $q'(0) = 0 \to q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$.
- $q \to 2$ C; 첫 최댓값은 $t = \pi/4$에서 $q \approx 2.19$ C.

> 답: $m = -3 \pm 4i$, $q_p = 2$ / $q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$, 최대 ≈ 2.19

비선형 미분방정식

10. 크게 흔들면 더 느리다

- θ가 작으면 $\sin\theta \approx \theta$: $\theta'' = -9.8\theta$, 주기 $2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s.
- 비선형 주기는 $T = 4K(\sin(\theta_0/2))/\sqrt{9.8}$.
- $\theta_0 = 0.3$: $T \approx 2.02$ s; $\theta_0 = 2$: $T \approx 2.67$ s.
- 선형 스프링과 달리 진자의 주기는 진폭에 따라 달라진다.

> 답: 작게: $\sin\theta \approx \theta \to T \approx 2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s / 크게 $\theta_0 = 2$: $T \approx 2.67$ s (주기가 길어짐)

11. 늘어진 케이블

- y가 없는 꼴: $u = y'$로 놓으면 $u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)}$.
- 변수분리: $\operatorname{arcsinh} u = x/2 \to u = \sinh(x/2)$.
- 적분: $y = 2\cosh(x/2) + C$; $y(0) = 2 \to C = 0$.
- 현수선 $y = 2\cosh(x/2)$; $y(4) = 2\cosh 2 \approx 7.52$.

> 답: $u = y'$로 놓으면 $u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)} \to u = \sinh(x/2)$ / $y = 2\cosh(x/2)$ (현수선), $y(4) \approx 7.52$

12. 탈출 속도

- y'를 곱해 적분: $y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$ (에너지).
- y'가 0이 되지 않으면 탈출한다. 즉 $v^2/2 - 1 \geq 0 \to v \geq \sqrt{2}$.
- $v = 1.2$: $y' = 0$일 때 최고 높이 $\to 1/(1 + y) = 0.28 \to y \approx 2.57$, 이후 다시 떨어진다.
- $v = 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.41$: 탈출한다.

> 답: 에너지: $y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$ / $v \geq \sqrt{2} \approx 1.41$이면 탈출 $\to v = 1.5$만 탈출

경곗값 문제

13. 기둥의 좌굴

- $\lambda \leq 0$이면 $y = 0$뿐이다.
- $\lambda = \alpha^2 > 0$이면 $y = c_2 \sin \alpha x$; $y(1) = 0$이려면 $\sin\alpha = 0 \to \alpha = n\pi$.
- 고윳값 $\lambda_n = n^2\pi^2$, 고유함수 $\sin n\pi x$.
- 임계 좌굴 하중 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$.

> 답: $\lambda = n^2\pi^2$일 때만 0이 아닌 해 (고윳값) / 임계 하중 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$, 모양 $y = \sin \pi x$

14. 처진 케이블

- 두 번 적분: $y = 0.1x^2 + c_1x + c_2$.
- $y(0) = 0 \to c_2 = 0$; $y(4) = 0 \to 1.6 + 4c_1 = 0 \to c_1 = -0.4$.
- $y = 0.1x(x - 4)$, $y'(0) = -0.4$.
- 최저점 $x = 2$: 처짐 0.4.

> 답: $y = 0.1x^2 + c_1x$, $y(4) = 0 \to y'(0) = -0.4$ / $y = 0.1x(x - 4)$, $x = 2$에서 최대 처짐 0.4

15. 냉각 핀

- $\theta = A\cosh(1-x) + B\sinh(1-x)$.
- $\theta'(1) = 0 \to B = 0$; $\theta(0) = 1 \to A = 1/\cosh 1$.
- $\theta = \cosh(1-x)/\cosh 1$, $\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$.
- 끝: $\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$.

> 답: $\theta = \cosh(1-x)/\cosh 1$, $\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$ / 끝 $\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$ (뿌리의 64.8%)

연립 선형 미분방정식

16. 군비 경쟁

- 행렬 $[[-1, 2], [2, -1]]$: $\lambda = -1 \pm 2 \to 1, -3$.
- 고유벡터: $\lambda = 1$에 대해 $(1, 1)$, $\lambda = -3$에 대해 $(1, -1)$.
- 부호가 반대 → 안장점 (불안정).
- $x + y > 0$인 출발점은 모두 $(1, 1)$ 방향으로 커진다: 경쟁이 격화된다.

> 답: 고윳값 $1, -3$ → 안장점 / $(1, 1)$ 방향으로 e^t처럼 커짐 → 경쟁 격화

17. 두 방의 냉각

- $\lambda = -1$ (벡터 $(1, 1)$), $\lambda = -3$ (벡터 $(1, -1)$).
- $x = 10e^{-t} + 10e^{-3t}$, $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$.
- $y' = 0 \to e^{2t} = 3 \to t = \ln 3/2 \approx 0.55$.
- $y_{max} \approx 3.85$; 이후 두 방 모두 바깥 기온을 향해 식는다.

> 답: 고윳값 $-1, -3$ → 안정 마디점 / $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$, $t \approx 0.55$에서 최대 ≈ 3.85

18. LC 회로

- 행렬 $[[0, 1], [-4, 0]]$: $\lambda = \pm 2i \to$ 중심.
- $q = \cos 2t$, $i = -2\sin 2t$.
- 궤적: $q^2 + i^2/4 = 1$ (타원), 주기 $2\pi/2 = \pi$.
- 최대 전류 2 A; 에너지가 C와 L 사이를 끝없이 오간다.

> 답: 고윳값 $\pm 2i \to$ 중심 (닫힌 타원) / $q^2 + i^2/4 = 1$: 주기 π, 최대 전류 2