高階微分方程式の応用問題

SnackLab 演習問題・高階微分方程式・応用問題 18 問と解答・snacklab.dev

SnackLab オリジナルの演習問題です。定数係数の微分方程式、非同次微分方程式、ばねと電気回路、非線形微分方程式、境界値問題、連立線形微分方程式までテーマ別に並べ、すべての答えは記号計算または数値計算で検算しました。各問題は SnackLab のショート動画でグラフを使って解説しており、SnackLab アプリの d/dx モードで確かめられます。

定数係数の微分方程式

1. ドアクローザー　油圧式ドアクローザーは $\theta'' + 5\theta' + 6\theta = 0$ に従う。ここで $\theta(t)$ はドアの開き角（rad）である。ドアを $\theta(0) = 1.2$ で静かに放すとき、$\theta(t)$ を求め、ドアが閉じた位置 $\theta = 0$ を行き過ぎるかどうか判定せよ。

2. ビルの揺れ　高層ビルの最上部が突風を受け、$x'' + 2x' + x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 3$ に従って動く。$x(t)$、最大変位およびその時刻を求めよ。

3. 同心球の間の電位　同心球の間の電位はコーシー・オイラー方程式 $r^2V'' + 2rV' = 0$ を満たす。内球（$r = 1$）は 4 V に保たれ、外球（$r = 2$）は接地されている。$V(r)$ を求めよ。

非同次微分方程式

4. 油の中を沈む玉　静止状態から放した小さな玉が、速度に比例する抵抗を受けて油の中を沈む：$y'' = 2 - 2y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$（単位は換算済み、y は下向きを正）。$y(t)$、$t = 4$ での深さ、終端速度を求めよ。

5. 橋の上の行進　固有振動数 3 の歩道橋の床が、振動数 2 の行進によって強制振動する：$x'' + 9x = 4\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。$x(t)$ とその最大変位を求めよ。

6. 弱まる突風とブランコ　静止しているブランコを、力が弱まっていく突風が押す：$x'' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。$x(t)$ と、t が大きいときの運動の振幅を求めよ。

ばねと電気回路

7. 車のサスペンション　車輪部（質量 1）がばね定数 16 のばねに取り付けられ、減衰係数 c のショックアブソーバーが付いている：$x'' + cx' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$（変位は換算済み）。臨界減衰の値と、そのときの運動を求めよ。

8. 洗濯機の共振　偏りのある洗濯機のドラムが、フレームをちょうど固有振動数で揺らす：$x'' + 25x = 2\cos 5t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$。$x(t)$ を求め、運動の様子を説明せよ。

9. RLC 回路の充電　$L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = 1/25$ F の直列 RLC 回路を 50 V の電池につなぐ：$q'' + 6q' + 25q = 50$, $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$。$q(t)$、定常状態、最初のピークを求めよ。

非線形微分方程式

10. 大きく振ると遅くなる　長さ 1 m の振り子は $\theta'' = -9.8 \sin\theta$ に従う。$\theta(0) = 0.3$ と $\theta(0) = 2$ からそれぞれ静かに放したときの周期を比較せよ。

11. 垂れ下がるケーブル　自重で垂れ下がる柔らかいケーブルは $y'' = 0.5\sqrt{(1 + (y')^2)}$ を満たし、最下点で $y(0) = 2, y'(0) = 0$ である。形 $y(x)$ と $x = 4$ での高さを求めよ。

12. 脱出速度　換算単位で、地球から鉛直に打ち上げた物体は $y'' = -1/(1 + y)^2, y(0) = 0, y'(0) = v$ に従う。$v = 1.2$ と $v = 1.5$ を比較し、脱出速度を求めよ。

境界値問題

13. 柱の座屈　軸方向の荷重 λ を受ける長さ 1 の細い柱は $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$ を満たす。0 でない解をもつ λ の値と、最小の（臨界）荷重を求めよ。

14. たるむケーブル　$x = 0$ と $x = 4$ にある 2 本の柱の間で一様な荷重を受けるケーブルは $y'' = 0.2, y(0) = 0, y(4) = 0$ を満たす。$y(x)$、初めの傾き、最大のたるみを求めよ。（シューティング法：いくつかの初期傾きを試してみよ。）

15. 冷却フィン　長さ 1 の冷却フィンは $\theta'' = \theta$（換算済み）を満たす。ここで θ は温度の超過分を根元での値で割ったもので $\theta(0) = 1$、先端は断熱されていて $\theta'(1) = 0$ である。$\theta(x)$、必要な傾き $\theta'(0)$、先端での値を求めよ。

連立線形微分方程式

16. 軍拡競争　リチャードソンの軍拡競争モデル $x' = -x + 2y$, $y' = 2x - y$ について、固有値を求めて原点を分類し、$x(0) = 1$, $y(0) = 0.5$ から出発したときの様子を説明せよ。

17. 2 部屋の冷却　つながった 2 部屋が外へ熱を失う：$x' = -2x + y$, $y' = x - 2y$（外気温を基準とした温度）。$x(0) = 20$, $y(0) = 0$ のとき、x, y と部屋 B の最高温度を求めよ。

18. LC 回路　$L = 1$ H, $C = 1/4$ F の LC 回路は連立方程式 $q' = i$, $i' = -4q$, $q(0) = 1$, $i(0) = 0$ を与える。q–i 平面での軌道を説明し、周期と最大電流を求めよ。

解答

定数係数の微分方程式

1. ドアクローザー

- 特性方程式 $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$。
- $\theta = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$；$\theta(0) = 1.2, \theta'(0) = 0 \to c_1 = 3.6, c_2 = -2.4$。
- すべての $t \geq 0$ で $\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} = e^{-3t}(3.6e^{t} - 2.4) > 0$。
- 過減衰：ドアは $\theta = 0$ を行き過ぎず、ゆっくり閉まる。

> 答: $m^2 + 5m + 6 = 0 \to m = -2, -3$（異なる2実根） / $\theta = 3.6e^{-2t} - 2.4e^{-3t} > 0$ → 行き過ぎない

2. ビルの揺れ

- $m^2 + 2m + 1 = 0 \to m = -1$（重根）。
- $x = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$；$x(0) = 0 \to c_1 = 0$；$x'(0) = 3 \to c_2 = 3$。
- $x = 3te^{-t}$；$t = 1$ で $x' = 3(1 - t)e^{-t} = 0$。
- 最大変位 $3/e \approx 1.10$（臨界減衰、振動しない）。

> 答: $m = -1$（重根）→ $x = 3te^{-t}$ / $t = 1$ で $x' = 0$ → 最大 $x = 3/e \approx 1.10$

3. 同心球の間の電位

- $V = r^m$ を代入：$m(m - 1) + 2m = m(m + 1) = 0 \to m = 0, -1$。
- $V = c_1 + c_2/r$。
- $V(1) = 4, V(2) = 0 \to c_2 = 8, c_1 = -4$。
- $V = 8/r - 4$；例えば $V(1.5) \approx 1.33$ V。（初期値問題として見ると $V'(1) = -8$。）

> 答: $V = r^m \to m(m - 1) + 2m = 0 \to m = 0, -1$ / $V = 8/r - 4$（$V(1.5) \approx 1.33$ V）

非同次微分方程式

4. 油の中を沈む玉

- 同次方程式：$m^2 + 2m = 0 \to y_c = c_1 + c_2 e^{-2t}$。
- 外力が定数で $m = 0$ が根なので $y_p = At$ とおく：$2A = 2 \to A = 1$。
- $y = t - (1 - e^{-2t})/2$。
- $y(4) \approx 3.50$；終端速度 $y' \to 1$。

> 答: $y_p = t$（未定係数法） / $y = t - (1 - e^{-2t})/2$、$y(4) \approx 3.50$、速度 → 1

5. 橋の上の行進

- $y_c = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$；$x_p = A\cos 2t$ とおくと $5A = 4 \to A = 4/5$。
- $x(0) = 0 \to c_1 = -4/5$；$x'(0) = 0 \to c_2 = 0$。
- $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$。
- $t = \pi$ で $\cos 2\pi = 1, \cos 3\pi = -1 \to x = 1.6$ となり、これが取りうる最大値である。

> 答: $x_p = (4/5)\cos 2t$ / $x = (4/5)(\cos 2t - \cos 3t)$、$t = \pi$ で最大 $|x| = 1.6$

6. 弱まる突風とブランコ

- $y_c = c_1\cos t + c_2\sin t$；$x_p = Ae^{-t}$ とおくと $2A = 1 \to A = 1/2$。
- $x(0) = 0 \to c_1 = -1/2$；$x'(0) = 0 \to c_2 = 1/2$。
- $x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$。
- t が大きいとき $x \approx (\sin t - \cos t)/2 = (\sqrt{2}/2)\sin(t - \pi/4)$：振幅 ≈ 0.71。

> 答: $x_p = e^{-t}/2$、$x = (e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$ / $e^{-t} \to 0$ なので振幅 $\sqrt{2}/2 \approx 0.71$ が残る

ばねと電気回路

7. 車のサスペンション

- $m^2 + cm + 16 = 0$ が重根をもつのは $c^2 - 64 = 0$ のとき $\to c = 8$。
- このとき $m = -4$（重根）：$x = (c_1 + c_2 t)e^{-4t}$。
- $x(0) = 1, x'(0) = 0 \to x = (1 + 4t)e^{-4t}$。
- $c < 8$：減衰振動（揺れる）；$c > 8$：過減衰（戻りが遅い）。

> 答: 臨界減衰：$c^2 = 4 \cdot 16 \to c = 8$ / $x = (1 + 4t)e^{-4t}$；$c < 8$ は揺れる、$c > 8$ はゆっくり

8. 洗濯機の共振

- $y_c = c_1\cos 5t + c_2\sin 5t$；$\cos 5t$ はすでに y_c に含まれるので $x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$ とおく。
- 代入すると $10B = 2, A = 0 \to x_p = (t\sin 5t)/5$。
- 初期条件から $c_1 = c_2 = 0$：$x = (t\sin 5t)/5$。
- 純粋な共振：振幅 $t/5$ は限りなく大きくなる。

> 答: 共振：$x_p = t(A\cos 5t + B\sin 5t)$ とおく / $x = (t\sin 5t)/5 \to$ 振幅が $t/5$ のように増え続ける

9. RLC 回路の充電

- $m^2 + 6m + 25 = 0 \to m = -3 \pm 4i$（減衰振動）。
- $q_p = 50/25 = 2$。
- $q(0) = 0, q'(0) = 0 \to q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$。
- $q \to 2$ C；最初のピークは $t = \pi/4$ で $q \approx 2.19$ C。

> 答: $m = -3 \pm 4i$、$q_p = 2$ / $q = 2 - e^{-3t}(2\cos 4t + 1.5\sin 4t)$、最大 ≈ 2.19

非線形微分方程式

10. 大きく振ると遅くなる

- θ が小さいとき $\sin\theta \approx \theta$：$\theta'' = -9.8\theta$、周期 $2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s。
- 非線形の周期は $T = 4K(\sin(\theta_0/2))/\sqrt{9.8}$。
- $\theta_0 = 0.3$：$T \approx 2.02$ s；$\theta_0 = 2$：$T \approx 2.67$ s。
- 線形のばねと異なり、振り子の周期は振幅によって変わる。

> 答: 小さい振れ：$\sin\theta \approx \theta \to T \approx 2\pi/\sqrt{9.8} \approx 2.01$ s / 大きい振れ $\theta_0 = 2$：$T \approx 2.67$ s（周期が長くなる）

11. 垂れ下がるケーブル

- y を含まない形：$u = y'$ とおくと $u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)}$。
- 変数分離：$\operatorname{arcsinh} u = x/2 \to u = \sinh(x/2)$。
- 積分：$y = 2\cosh(x/2) + C$；$y(0) = 2 \to C = 0$。
- 懸垂線 $y = 2\cosh(x/2)$；$y(4) = 2\cosh 2 \approx 7.52$。

> 答: $u = y'$ とおくと $u' = 0.5\sqrt{(1 + u^2)} \to u = \sinh(x/2)$ / $y = 2\cosh(x/2)$（懸垂線）、$y(4) \approx 7.52$

12. 脱出速度

- y' を掛けて積分：$y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$（エネルギー）。
- y' が 0 にならなければ脱出する。すなわち $v^2/2 - 1 \geq 0 \to v \geq \sqrt{2}$。
- $v = 1.2$：$y' = 0$ で最高点 $\to 1/(1 + y) = 0.28 \to y \approx 2.57$、その後落下する。
- $v = 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.41$：脱出する。

> 答: エネルギー：$y'^2/2 - 1/(1 + y) = v^2/2 - 1$ / $v \geq \sqrt{2} \approx 1.41$ なら脱出 $\to v = 1.5$ だけ脱出

境界値問題

13. 柱の座屈

- $\lambda \leq 0$ では $y = 0$ しかない。
- $\lambda = \alpha^2 > 0$ のとき $y = c_2 \sin\alpha x$；$y(1) = 0$ には $\sin\alpha = 0$ が必要 $\to \alpha = n\pi$。
- 固有値 $\lambda_n = n^2\pi^2$、固有関数 $\sin n\pi x$。
- 臨界座屈荷重 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$。

> 答: $\lambda = n^2\pi^2$ のときだけ 0 でない解（固有値） / 臨界荷重 $\lambda_1 = \pi^2 \approx 9.87$、形 $y = \sin\pi x$

14. たるむケーブル

- 2 回積分：$y = 0.1x^2 + c_1x + c_2$。
- $y(0) = 0 \to c_2 = 0$；$y(4) = 0 \to 1.6 + 4c_1 = 0 \to c_1 = -0.4$。
- $y = 0.1x(x - 4)$, $y'(0) = -0.4$。
- 最下点 $x = 2$：たるみ 0.4。

> 答: $y = 0.1x^2 + c_1x$、$y(4) = 0 \to y'(0) = -0.4$ / $y = 0.1x(x - 4)$、$x = 2$ で最大たるみ 0.4

15. 冷却フィン

- $\theta = A\cosh(1 - x) + B\sinh(1 - x)$。
- $\theta'(1) = 0 \to B = 0$；$\theta(0) = 1 \to A = 1/\cosh 1$。
- $\theta = \cosh(1 - x)/\cosh 1$, $\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$。
- 先端：$\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$。

> 答: $\theta = \cosh(1 - x)/\cosh 1$、$\theta'(0) = -\tanh 1 \approx -0.762$ / 先端 $\theta(1) = 1/\cosh 1 \approx 0.648$（根元の 64.8%）

連立線形微分方程式

16. 軍拡競争

- 行列 $[[-1, 2], [2, -1]]$：$\lambda = -1 \pm 2 \to 1, -3$。
- 固有ベクトルは $\lambda = 1$ に対して $(1, 1)$、$\lambda = -3$ に対して $(1, -1)$。
- 符号が逆 → 鞍点（不安定）。
- $x + y > 0$ から出発すると $(1, 1)$ 方向に増大する：競争は激化する。

> 答: 固有値 $1, -3$ → 鞍点 / $(1, 1)$ 方向に e^t のように増える → 激化

17. 2 部屋の冷却

- $\lambda = -1$（ベクトル $(1, 1)$）、$\lambda = -3$（ベクトル $(1, -1)$）。
- $x = 10e^{-t} + 10e^{-3t}$, $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$。
- $y' = 0 \to e^{2t} = 3 \to t = \ln 3/2 \approx 0.55$。
- $y_{max} \approx 3.85$；その後、両方の部屋とも外気温に向かって冷える。

> 答: 固有値 $-1, -3$ → 安定結節点 / $y = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$、$t \approx 0.55$ で最大 ≈ 3.85

18. LC 回路

- 行列 $[[0, 1], [-4, 0]]$：$\lambda = \pm 2i$ → 渦心点。
- $q = \cos 2t$, $i = -2\sin 2t$。
- 軌道：$q^2 + i^2/4 = 1$（楕円）、周期 $2\pi/2 = \pi$。
- 最大電流 2 A；エネルギーは C と L の間を絶えず行き来する。

> 答: 固有値 $\pm 2i$ → 渦心点（閉じた楕円） / $q^2 + i^2/4 = 1$：周期 π、最大電流 2