一階微分方程應用題

SnackLab 練習題 • 一階微分方程 • 27 題應用題與詳解 • snacklab.dev

這是 SnackLab 自製的練習題，從方向場到聯立微分方程依主題編排，所有答案都經過數值驗算。每一題都在 SnackLab 短影片中用圖形解說，也可以用 SnackLab App 的 d/dx 模式自己確認。

方向場與自治方程

1. 阿利效應　某小型動物族群 $P(t)$（單位：百隻）滿足 $dP/dt = 0.2P(P-1)(5-P)$。求所有平衡解並判斷其穩定性，並說明 $P(0) = 0.8$ 與 $P(0) = 1.2$ 時族群會如何變化。

2. 室內溫度週期　某建築物的室內溫度 $T(t)$ 遵循牛頓冷卻定律 $T' = 0.5(A(t) - T)$，其中室外溫度為 $A(t) = 5 + 3\sin t$（已縮放的單位）。利用方向場描述 $T(0) = 0$ 與 $T(0) = 10$ 時的長期行為。T 的長期振幅為何？

3. 漏水的水槽　水以固定速率注入水槽，同時從小孔漏出，因此水深 $h(t)$ 滿足 $dh/dt = 1 - \sqrt{h}$。求平衡水深並判斷其是否穩定。若水槽一開始是空的，或水深為 4，會發生什麼情形？

變數分離方程

4. 放射性衰變　某放射性樣本的質量為 10 g，3 天後剩下 8 g。假設 $dm/dt = -km$，求半衰期，以及只剩 1 g 的時間。

5. 熄火滑行的船　一艘船在速度 5 m/s 時關閉引擎，之後靠慣性滑行，水的阻力使 $dv/dt = -0.1v^2$。速度何時降至 1 m/s？此時船已行進多遠？

6. 季節性族群　某族群的成長率隨季節變化，滿足 $dP/dt = 0.5P\cos t$，$P(0) = 2$。求 $P(t)$ 及其最大值與最小值。

一階線性方程

7. 受污染的湖泊　某湖泊有污染物以遞減的速率 $2e^{-0.5t}$ kg/天 流入，同時污染物以 0.5y kg/天 的速率被沖出：$y' = 2e^{-0.5t} - 0.5y$，$y(0) = 0$。求 y(t) 及污染量最大的時刻。

8. 儲蓄與定期存入　某帳戶以年利率 5% 連續複利計息，並以每年 $2,000 的速率連續存入。以 $10,000 為 A 的單位：$A' = 0.05A + 0.2$，$A(0) = 0$。餘額何時達到 $50,000？

9. RL 電路（交流電源）　某串聯 RL 電路中 $L = 1$ H、$R = 2\,\Omega$，電源 $E(t) = 4 \sin t$ V，且 $i(0) = 0$，則 $i' + 2i = 4 \sin t$。求 i(t) 及穩態電流的振幅。

正合方程

10. 質點的路徑　平面上一質點沿著滿足 $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ 的曲線運動，且通過點 $(1, 1)$。求此曲線及其最高點。

11. 硬化彈簧　接在硬化彈簧上的物體滿足 $v\,dv/dx = -(x + x^3)$，其中 v 為位置 x 處的速度。物體由 $x = 1$ 處靜止釋放。求 (x, v) 平面上的能量曲線及最大速率。

12. 流場的流線　某平面流的流線滿足 $(2y + 3x)dx + x\,dy = 0$。求通過 $(1, 1)$ 的流線，以及它與 x 軸的交點。

代換法求解

13. 魚的成長（貝塔朗菲）　某種魚的體重 $W(t)$（kg）遵循貝塔朗菲（von Bertalanffy）模型 $dW/dt = 2W^{2/3} - W$，$W(0) = 1$。求 $W(t)$、極限體重，以及 $W = 4$ 的時間。

14. 正交軌跡　電力線與等位圓 $x^2 + y^2 = 2cx$ 處處垂直。證明電力線滿足 $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$，解此方程，並求通過 $(1, 1/2)$ 的電力線。

15. 游泳渡河　一名泳者從 $(1, 0)$ 出發，始終以速率 2 朝原點的碼頭游去，同時河水以速率 1 將她往 $+y$ 方向沖。她的路徑滿足 $dy/dx = (y - \tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)})/x$。求此路徑。她能抵達碼頭嗎？最大偏移量是多少？

尤拉法

16. 有空氣阻力的落體　某落體滿足 $dv/dt = 9.8 - 0.2v^2$，$v(0) = 0$。以步長 $h = 0.1$ 的尤拉法估計 $v(0.5)$，並與精確解 $v = 7\tanh(1.4t)$ 比較，再求終端速度。

17. 捕撈的極限　某魚群在固定捕撈下滿足 $P' = 0.5P(1 - P/8) - 1$，$P(0) = 2$。以步長 $h = 0.5$ 的尤拉法估計 $P(2)$，再求精確解，並求族群何時滅絕。

18. 季節性流入　某池塘中污染物的量 $y(t)$ 滿足 $y' = 1 + \sin t - 0.5y$，$y(0) = 0$。以步長 $h = 0.5$ 的尤拉法估計 $y(2)$，並描述其長期行為。

線性模型

19. 碳十四定年　古代火坑中的木炭含有原本碳十四含量的 30%。已知 C-14 的半衰期為 5730 年，估計此木炭的年代。

20. 靜脈點滴給藥　以靜脈點滴每小時給藥 2 mg，藥物的排除速率與體內藥量成正比（速率常數為每小時 0.25）。設 $y(0) = 0$，求 $y(t)$、長期藥量，以及 y 達到該值 90% 的時間。

21. 推算死亡時間　在 20 °C 的房間內發現一具遺體，體溫為 30 °C；一小時後降為 28 °C。假設符合牛頓冷卻定律，且正常體溫為 37 °C，估計死亡發生在發現前多久。

非線性模型

22. 謠言的傳播　謠言在 1000 人的小鎮中傳播，其傳播速率與「已聽過的人數」和「尚未聽過的人數」的乘積成正比。起初有 10 人知道，2 天後有 100 人知道。何時全鎮會有一半的人知道？

23. 腫瘤成長（Gompertz）　某腫瘤的體積 $y(t)$ 遵循 Gompertz 模型 $dy/dt = 0.5y(\ln 8 - \ln y)$，$y(0) = 1$。求 $y(t)$、其極限大小，以及達到該大小一半的時間。

24. 圓錐水槽排水　水從倒立圓錐形水槽頂點（最低處）的小孔流出。由托里切利定律，水深滿足 $dh/dt = -3h^{-3/2}$（單位：ft、分鐘），$h(0) = 4$。水槽何時流乾？

聯立微分方程模型

25. 兩個相連的水槽　兩個 10 L 的水槽：純水以 2 L/分鐘 流入 A，A→B 為 3 L/分鐘，B→A 為 1 L/分鐘，B 以 2 L/分鐘 排出。A 槽起初有 5 kg 的鹽，B 槽沒有。建立聯立微分方程，並求 B 槽中鹽量的最大值。

26. 傳染病（SIR）　在 SIR 模型中（S、I 以千人為單位），$S' = -0.5SI$，$I' = 0.5SI - I$，$S(0) = 9.9$，$I(0) = 0.1$。求感染人數的最高峰，以及從未被感染的人數。

27. 蘭徹斯特戰鬥模型　兩軍交戰：$x' = -2y$，$y' = -x$（單位：千名士兵），$x(0) = 6$，$y(0) = 4$。Y 軍每名士兵的戰力是 X 軍的兩倍。哪一方獲勝？剩下多少士兵？

詳解

方向場與自治方程

1. 阿利效應

- 平衡解：$P = 0, 1, 5$（右式的零點）。
- P' 的正負：在 $(0, 1)$ 為負，在 $(1, 5)$ 為正，在 $(5, \infty)$ 為負。
- 故 $P = 0$ 與 $P = 5$ 為穩定（吸引子），$P = 1$ 為不穩定（排斥子）。
- $P(0) = 0.8$ 低於臨界值 1 → P 遞減至 0（滅絕）。
- $P(0) = 1.2$ 高於 1 → P 遞增並趨近環境承載力 5。
- （這種臨界門檻稱為阿利效應。）

> 答: $P = 0$ 穩定，$P = 1$ 不穩定，$P = 5$ 穩定 / $P(0) = 0.8 \to$ 滅絕；$1.2 \to$ 增至 5

2. 室內溫度週期

- 此方程為一階線性：$T' + 0.5T = 2.5 + 1.5 \sin t$。
- 每個解 = 暫態項 $Ce^{-t/2}$ + 唯一的週期穩態解。
- 穩態解：$T_p = 5 + (1.5/1.25)(0.5 \sin t - \cos t) = 5 + 1.342 \sin(t - 1.107)$。
- 因此不論從何處出發，T 最終都在 ≈ 3.66 與 ≈ 6.34 之間振盪。
- 振幅 $3 \cdot 0.5/\sqrt{(0.25 + 1)} = 1.34 < 3$：建築物使室外溫度的起伏變小且延遲。

> 答: 所有解都趨近同一個週期解 / T 在 5 ± 1.34 擺盪（小於 ± 3），且延遲

3. 漏水的水槽

- 平衡解：$1 - \sqrt{h} = 0 \Rightarrow h = 1$。
- 當 $0 \le h < 1$ 時 $h' > 0$（水位上升）；當 $h > 1$ 時 $h' < 0$（水位下降）。
- 因此 $h = 1$ 為漸近穩定。
- $h(0) = 0$ 上升並趨近 1；$h(0) = 4$ 下降並趨近 1。兩者都不會越過 $h = 1$。
- 若流入率為 a，則平衡解為 $h = a^2$。

> 答: 平衡解 $h = 1$（流入 = 流出） / 穩定：$h(0) = 0$ 或 4 都趨近 1

變數分離方程

4. 放射性衰變

- 變數分離：$dm/m = -k\,dt \Rightarrow m = 10e^{-kt}$。
- $m(3) = 8 \Rightarrow e^{-3k} = 0.8 \Rightarrow k = \ln(5/4)/3 \approx 0.07438$（每天）。
- 半衰期：$t_{½} = \ln 2 / k \approx 9.32$ 天。
- $m = 1 \Rightarrow e^{-kt} = 0.1 \Rightarrow t = \ln 10 / k \approx 30.96$ 天。

> 答: $k \approx 0.0744$ /天，半衰期 ≈ 9.32 天 / 剩 1 g：$t = \ln 10 / k \approx 31.0$ 天

5. 熄火滑行的船

- 變數分離：$dv/v^2 = -0.1\,dt \Rightarrow 1/v = 0.1t + 1/5 \Rightarrow v = 5/(1 + 0.5t)$。
- $v = 1 \Rightarrow 1 + 0.5t = 5 \Rightarrow t = 8$ s。
- 距離：$\int_0^8 5/(1 + 0.5t)\,dt = 10 \ln(1 + 0.5t)\,|_0^8 = 10 \ln 5 \approx 16.1$ m。
- 對所有 t 都有 $v > 0$，但距離 $10 \ln(1 + 0.5t)$ 會無限增加。

> 答: $v = 5/(1 + 0.5t)$，$t = 8$ s 時 $v = 1$ / 距離 $10 \ln 5 \approx 16.1$ m（永不完全停下）

6. 季節性族群

- 變數分離：$dP/P = 0.5 \cos t\,dt \Rightarrow \ln P = 0.5 \sin t + C$。
- $P(0) = 2 \Rightarrow P = 2e^{0.5 \sin t}$。
- $\sin t = 1$ 時有最大值 $P = 2e^{0.5} \approx 3.30$；$\sin t = -1$ 時有最小值 $P = 2e^{-0.5} \approx 1.21$。
- 族群數量是週期為 2π 的週期函數（長期而言不會成長）。

> 答: $P = 2e^{0.5 \sin t}$ / 在 ≈ 1.21 與 ≈ 3.30 之間振盪

一階線性方程

7. 受污染的湖泊

- 一階線性：$y' + 0.5y = 2e^{-0.5t}$，積分因子 $\mu = e^{0.5t}$。
- $(e^{0.5t} y)' = 2 \Rightarrow e^{0.5t} y = 2t \Rightarrow y = 2t\,e^{-0.5t}$。
- $y' = 2e^{-0.5t}(1 - 0.5t) = 0 \Rightarrow t = 2$。
- 最大值 $y(2) = 4e^{-1} \approx 1.47$ kg。

> 答: 積分因子 $e^{t/2}$：$y = 2t\,e^{-t/2}$ / $t = 2$ 天時最高：$y = 4/e \approx 1.47$ kg

8. 儲蓄與定期存入

- 一階線性：$A' - 0.05A = 0.2$，$\mu = e^{-0.05t}$。
- $(e^{-0.05t}A)' = 0.2e^{-0.05t} \Rightarrow A = -4 + Ce^{0.05t}$；$A(0) = 0 \Rightarrow C = 4$。
- $A = 4(e^{0.05t} - 1)$。
- $A = 5 \Rightarrow e^{0.05t} = 2.25 \Rightarrow t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$ 年。

> 答: $A = 4(e^{0.05t} - 1)$（× \$10,000） / 達標：$t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$ 年

9. RL 電路（交流電源）

- $\mu = e^{2t}$：$(e^{2t} i)' = 4e^{2t} \sin t$。
- $\int e^{2t} \sin t\,dt = e^{2t}(2 \sin t - \cos t)/5$。
- $i = 0.8(2 \sin t - \cos t) + Ce^{-2t}$；$i(0) = 0 \Rightarrow C = 0.8$。
- 暫態項 $0.8e^{-2t} \to 0$；穩態 $0.8(2 \sin t - \cos t)$ 的振幅為 $0.8\sqrt{5} = 4/\sqrt{5} \approx 1.79$ A。

> 答: 穩態 $0.8(2 \sin t - \cos t)$ / 暫態 $0.8e^{-2t} \to 0$；振幅 ≈ 1.79 A

正合方程

10. 質點的路徑

- $M_y = 1 = N_x$，故此方程為正合方程。
- $F = x^2 + xy + y^2$：$F_x = 2x + y$，$F_y = x + 2y$。
- 通過 $(1, 1)$：$x^2 + xy + y^2 = 3$，為一個旋轉過的橢圓。
- 最高點：$dy/dx = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow (-1, 2)$。

> 答: 正合：$x^2 + xy + y^2 = 3$（傾斜的橢圓） / 最高點 $(-1, 2)$

11. 硬化彈簧

- 改寫為 $(x + x^3)dx + v\,dv = 0$：$M_v = 0 = N_x$，為正合方程。
- $F = x^2/2 + x^4/4 + v^2/2 = C$（總能量）。
- 在 $x = 1$，$v = 0$：$C = 1/2 + 1/4 = 3/4$。
- $x = 0$ 時速率最大：$v^2/2 = 3/4 \Rightarrow v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$。
- 封閉曲線表示物體在 $x = -1$ 與 $x = 1$ 之間做週期振盪。

> 答: 正合：$v^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = 3/4$（能量） / $x = 0$ 時最快：$v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$

12. 流場的流線

- $M_y = 2$，$N_x = 1$：非正合。$(M_y - N_x)/N = 1/x$ 只與 x 有關 $\Rightarrow \mu = x$。
- $x(2y + 3x)dx + x^2\,dy = 0$ 為正合方程，$F = x^2y + x^3$。
- 通過 $(1, 1)$：$x^2y + x^3 = 2 \Rightarrow y = 2/x^2 - x$。
- $y = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$。

> 答: 非正合；$\mu = x$：$x^2y + x^3 = 2$ / 交 x 軸於 $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$

代換法求解

13. 魚的成長（貝塔朗菲）

- 白努利方程，$n = 2/3$。令 $u = W^{1/3}$：$u' = (1/3)W^{-2/3}W' = (2 - u)/3$。
- $u = 2 - Ce^{-t/3}$；$u(0) = 1 \Rightarrow C = 1$。
- $W = (2 - e^{-t/3})^3 \to 8$ kg（當 $t \to \infty$）。
- $W = 4 \Rightarrow 2 - e^{-t/3} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow t = -3\ln(2 - \sqrt[3]{4}) \approx 2.66$。

> 答: 白努利：$W = (2 - e^{-t/3})^3$ / $W \to 8$ kg；$t \approx 2.66$ 時 $W = 4$

14. 正交軌跡

- 圓族：$2x + 2yy' = 2c$，其中 $2c = (x^2 + y^2)/x \Rightarrow y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$。
- 正交軌跡的斜率：$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$（齊次方程）。
- 令 $y = ux$：$u + xu' = 2u/(1 - u^2) \Rightarrow (1 - u^2)du/(u(1 + u^2)) = dx/x$。
- 積分：$\ln u - \ln(1 + u^2) = \ln x + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ky$（與 x 軸相切的圓）。
- 代入 $(1, 1/2)$：$1 + 1/4 = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.5y$，即 $x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$。

> 答: 齊次，$y = ux$：$x^2 + y^2 = 2ky$ / 過該點：$x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$

15. 游泳渡河

- 齊次方程：令 $y = ux$ 得 $xu' = -\frac{1}{2}\sqrt{(1 + u^2)}$。
- $\int du/\sqrt{(1 + u^2)} = -\frac{1}{2} \ln x + C \Rightarrow \ln(u + \sqrt{(1 + u^2)}) = -\frac{1}{2} \ln x$（$x = 1$ 時 $u = 0$）。
- $u + \sqrt{(1 + u^2)} = x^{-1/2} \Rightarrow u = (x^{-1/2} - x^{1/2})/2$。
- $y = ux = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to 0$（當 $x \to 0$）：她能抵達碼頭。
- $y' = 0 \Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow$ 最大偏移 $y = \frac{1}{2}(1/\sqrt{3} - 1/(3\sqrt{3})) = 1/(3\sqrt{3}) \approx 0.192$。

> 答: $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to$ 她能抵達碼頭 / $x = 1/3$ 時偏移最大：$y \approx 0.192$

尤拉法

16. 有空氣阻力的落體

- $v_{n+1} = v_n + 0.1(9.8 - 0.2v_n^2)$。
- $v_1 = 0.98$, $v_2 = 1.9408$, $v_3 = 2.8455$, $v_4 = 3.6635$, $v_5 = 4.3751$。
- 精確解：$v(0.5) = 7 \tanh 0.7 \approx 4.2306$（尤拉法高估，誤差 ≈ 0.14）。
- 終端速度：$v' = 0 \Rightarrow v = \sqrt{(9.8/0.2)} = 7$ m/s。

> 答: 尤拉：0.98, 1.94, 2.85, 3.66, 4.38 / 精確解 4.23；終端速度 7 m/s

17. 捕撈的極限

- 尤拉法：$P_1 = 1.875$, $P_2 = 1.7339$, $P_3 = 1.5734$, $P_4 = 1.3894 \approx P(2)$。
- 精確解：$0.5P - P^2/16 - 1 = -(P - 4)^2/16$（$P = 4$ 為半穩定）。
- 令 $u = P - 4$：$u' = -u^2/16 \Rightarrow 1/u = t/16 - 1/2 \Rightarrow P = 4 + 16/(t - 8)$。
- $P(2) = 4 - 16/6 = 4/3 \approx 1.333$。當 $t - 8 = -4$，即 $t = 4$ 時 $P = 0$。
- 啟示：P 低於 4 時，即使捕撈量很小，也會讓魚群走向滅絕。

> 答: 尤拉：1.875, 1.734, 1.573, 1.389 / 精確 $P(2) = 4/3$，$t = 4$ 時滅絕

18. 季節性流入

- 尤拉法：$y_1 = 0.5$, $y_2 = 1.1147$, $y_3 = 1.7568$, $y_4 = 2.3163 \approx y(2)$。
- 此方程為一階線性，精確值為 $y(2) \approx 2.2552$。
- 穩態：$y = 2 + 0.4 \sin t - 0.8 \cos t$，振幅 $1/\sqrt{1.25} \approx 0.894$。
- 因此 y 在 2 附近振盪，介於 ≈ 1.11 與 ≈ 2.89 之間。

> 答: 尤拉：0.5, 1.115, 1.757, 2.316 / 長期：$2 + 0.894 \sin(t - 1.107)$

線性模型

19. 碳十四定年

- $A(t) = A_0 e^{-kt}$，$A(5730) = A_0/2 \Rightarrow k = \ln 2 / 5730 \approx 1.2097 \times 10^{-4}$。
- $A = 0.3A_0 \Rightarrow e^{-kt} = 0.3 \Rightarrow t = \ln(1/0.3)/k$。
- $t = 5730 \cdot \ln(10/3)/\ln 2 \approx 9{,}953$ 年。
- （圖形：t 以千年為單位，y = 剩餘百分比 ÷ 10。）

> 答: $k = \ln 2 / 5730 \approx 1.21 \times 10^{-4}$ / $t = \ln(1/0.3)/k \approx 9{,}950$ 年

20. 靜脈點滴給藥

- $y' + 0.25y = 2 \Rightarrow y = 8 + Ce^{-t/4}$；$y(0) = 0 \Rightarrow C = -8$。
- $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to 8$ mg。
- $0.9 \cdot 8 \Rightarrow e^{-t/4} = 0.1 \Rightarrow t = 4 \ln 10 \approx 9.21$ h。
- 點滴速率加倍，藥量也會加倍，但達到 90% 所需的時間不變。

> 答: $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to$ 藥量趨近 8 mg / $t = 4 \ln 10 \approx 9.2$ h 時達 90%

21. 推算死亡時間

- $T - 20 = 10e^{-kt}$，以發現時刻為 t = 0。
- $28 - 20 = 10e^{-k} \Rightarrow k = \ln(10/8) \approx 0.2231$（每小時）。
- 死亡時 T = 37：$17 = 10e^{-kt} \Rightarrow t = -\ln 1.7 / k \approx -2.38$。
- 死亡時間約在發現前 2.38 h ≈ 2 小時 23 分鐘。
- （圖形：溫度以 10 °C 為單位，從死亡時刻開始畫。）

> 答: $k = \ln(10/8) \approx 0.223$ /h / 約 2.38 h 前死亡（2 小時 23 分鐘）

非線性模型

22. 謠言的傳播

- 邏輯斯諦：$x = 1000/(1 + Ce^{-1000kt})$，$x(0) = 10 \Rightarrow C = 99$。
- $x(2) = 100 \Rightarrow 1 + 99e^{-2000k} = 10 \Rightarrow 1000k = \ln 11 / 2 \approx 1.199$。
- $x = 500 \Rightarrow 99e^{-1000kt} = 1 \Rightarrow t = \ln 99 / (1000k) = 2 \ln 99 / \ln 11 \approx 3.83$ 天。
- （圖形：x 以百人為單位。）

> 答: $x = 1000/(1 + 99e^{-1000kt})$ / $t = 2 \ln 99 / \ln 11 \approx 3.83$ 天

23. 腫瘤成長（Gompertz）

- 令 $z = \ln y$：$z' = y'/y = 0.5(\ln 8 - z)$，$z(0) = 0$。
- $z = \ln 8\,(1 - e^{-t/2}) \Rightarrow y = 8^{1 - e^{-t/2}} \to 8$。
- $y = 4 \Rightarrow 1 - e^{-t/2} = 2/3 \Rightarrow t = 2 \ln 3 \approx 2.20$。

> 答: $y = 8^{1 - e^{-t/2}} \to 8$ / $t = 2 \ln 3 \approx 2.20$ 時 $y = 4$

24. 圓錐水槽排水

- 變數分離：$h^{3/2}\,dh = -3\,dt \Rightarrow (2/5)h^{5/2} = -3t + C$。
- $h(0) = 4 \Rightarrow C = (2/5) \cdot 32 \Rightarrow h^{5/2} = 32 - 7.5t$。
- 流乾：$h = 0 \Rightarrow t = 32/7.5 \approx 4.27$ 分鐘。
- 越接近底部（圓錐較窄處），水位下降得越快。

> 答: $h^{5/2} = 32 - 7.5t$ / $t = 32/7.5 \approx 4.27$ 分鐘時流乾

聯立微分方程模型

25. 兩個相連的水槽

- $x' = -(3/10)x + (1/10)y$，$y' = (3/10)x - (3/10)y$。
- 特徵值：$(\lambda + 0.3)^2 = 0.03 \Rightarrow \lambda = -0.3 \pm 0.1732$：皆為負 $\Rightarrow (x, y) \to (0, 0)$。
- 當 $y' = 0 \Rightarrow y = x$（在相軌跡上）時，B 槽鹽量最大。
- 數值計算：$y_{max} \approx 1.96$ kg，發生在 $t \approx 3.8$ 分鐘。

> 答: 特徵值 $-0.3 \pm 0.1\sqrt{3}$ 皆為負 → 鹽被沖淨 / B 最多 ≈ 1.96 kg（$t \approx 3.8$ 分鐘）

26. 傳染病（SIR）

- $dI/dS = (0.5SI - I)/(-0.5SI) = -1 + 2/S \Rightarrow I = -S + 2 \ln S + C$。
- $C = 10 - 2 \ln 9.9 \Rightarrow I = 10 - S + 2 \ln(S/9.9)$。
- $S = 2$ 時 I 最大：$I_{max} = 8 + 2 \ln(2/9.9) \approx 4.80$ 千人。
- 疫情在 $I = 0$ 時結束：$10 - S + 2 \ln(S/9.9) = 0 \Rightarrow S\infty \approx 0.069$ 千人 ≈ 69 人。

> 答: $S = 2$ 時高峰 $I_{max} \approx 4.80$ 千人 / 從未感染：$S\infty \approx 0.069$（≈ 69 人）

27. 蘭徹斯特戰鬥模型

- $dx/dy = 2y/x \Rightarrow x\,dx = 2y\,dy \Rightarrow x^2 - 2y^2 = C$（蘭徹斯特平方法則）。
- $C = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ Y 先降到 0。
- 當 $y = 0$：$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$，剩下 2 千名士兵。
- 數值計算顯示戰鬥在 $t \approx 1.25$ 結束。（Y 的戰力係數須大於 2.25 才能獲勝。）

> 答: $x^2 - 2y^2 = 4$（蘭徹斯特平方法則） / X 獲勝，剩 2 千人（$t \approx 1.25$）