1계 미분방정식 활용 문제

SnackLab 연습문제 · 1계 미분방정식 · 활용 문제 27개와 풀이 · snacklab.dev

SnackLab이 직접 만든 연습문제입니다. 방향장부터 연립 미분방정식까지 주제별로 구성했고, 모든 답은 수치 계산으로 검산했습니다. 각 문제는 SnackLab 숏츠에서 그래프로 풀이하며, SnackLab 앱의 d/dx 모드로 직접 확인할 수 있습니다.

방향장과 자율 미분방정식

1. 앨리 효과. 작은 동물 개체군의 개체 수 $P(t)$(단위: 백 마리)가 $dP/dt = 0.2P(P - 1)(5 - P)$를 따른다. 모든 평형해를 구하고 각각의 안정성을 판정하시오. 또한 $P(0) = 0.8$인 경우와 $P(0) = 1.2$인 경우 각각 어떻게 되는지 설명하시오.

2. 실내 온도 변화. 건물의 실내 온도 $T(t)$는 뉴턴 냉각 법칙 $T' = 0.5(A(t) - T)$를 따르며, 바깥 온도는 $A(t) = 5 + 3\sin t$ (축척된 단위)이다. 방향장을 이용하여 $T(0) = 0$일 때와 $T(0) = 10$일 때의 장기 거동을 설명하시오. 장기적으로 T의 진폭은 얼마인가?

3. 새는 물탱크. 물이 일정한 속도로 탱크에 유입되는 동시에 구멍으로 새어 나가서, 수심 $h(t)$가 $dh/dt = 1 - \sqrt{h}$를 만족한다. 평형 수심을 구하고 안정한지 판정하시오. 탱크가 빈 상태에서 시작하는 경우와 수심 4에서 시작하는 경우 각각 어떻게 되는가?

변수분리형 미분방정식

4. 방사성 붕괴. 질량이 10 g인 방사성 시료가 있다. 3일 후 8 g이 남았다. $dm/dt = -km$이라 가정하고, 반감기와 1 g만 남는 시점을 구하시오.

5. 시동 끈 보트. 보트가 5 m/s로 달리다가 엔진을 끄고 관성으로 나아간다. 물의 저항에 의해 $dv/dt = -0.1v^2$이다. 속력이 1 m/s로 떨어지는 시점과 그때까지 보트가 이동한 거리를 구하시오.

6. 계절 따라 변하는 개체 수. 계절에 따라 성장률이 변하는 개체군이 $dP/dt = 0.5P\cos t$, $P(0) = 2$를 만족한다. $P(t)$를 구하고, P의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

1계 선형 미분방정식

7. 오염된 호수. 호수에 오염물질이 $2e^{-0.5t}$ kg/일의 속도로 유입되고(시간이 지나면서 줄어든다), 0.5y kg/일의 속도로 배출된다: $y' = 2e^{-0.5t} - 0.5y$, $y(0) = 0$. y(t)와 오염이 최대가 되는 시점을 구하시오.

8. 적립식 저축. 어떤 계좌는 연 5%의 이자를 연속 복리로 받고, 매년 $2,000씩 연속적으로 입금된다. A의 단위를 $10,000로 하면 $A' = 0.05A + 0.2$, $A(0) = 0$이다. 잔액이 $50,000에 도달하는 시점을 구하시오.

9. 교류 전원 RL 회로. 직렬 RL 회로에서 L = 1 H, R = 2 Ω, 전원 $E(t) = 4 \sin t$ V이고 $i(0) = 0$이다. 이때 $i' + 2i = 4 \sin t$이다. i(t)와 정상상태 전류의 진폭을 구하시오.

완전 미분방정식

10. 입자의 경로. 평면 위의 한 입자가 $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$을 만족하는 곡선을 따라 움직이며 점 $(1, 1)$을 지난다. 이 곡선과 곡선 위의 최고점을 구하시오.

11. 경화 스프링. 경화 스프링에 매달린 물체가 $v\,dv/dx = -(x + x^3)$를 만족한다. 여기서 v는 위치 x에서의 속도이다. 물체를 $x = 1$에서 정지 상태로 놓을 때, (x, v) 평면에서의 에너지 곡선과 최대 속력을 구하시오.

12. 유체의 유선. 평면 흐름의 유선이 $(2y + 3x)dx + x\,dy = 0$을 만족한다. 점 $(1, 1)$을 지나는 유선을 구하고, 그 유선이 x축과 만나는 점을 구하시오.

치환에 의한 풀이

13. 물고기 성장(베르탈란피). 물고기의 무게 $W(t)$ (kg)가 폰 베르탈란피 모델 $dW/dt = 2W^{2/3} - W$, $W(0) = 1$을 따른다. $W(t)$와 극한 무게, 그리고 $W = 4$가 되는 시점을 구하시오.

14. 직교 궤적. 전기력선은 등전위선인 원 $x^2 + y^2 = 2cx$에 수직이다. 전기력선이 $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$을 만족함을 보이고, 이 방정식을 풀어 점 $(1, 1/2)$을 지나는 전기력선을 구하시오.

15. 강 건너 헤엄치기. 수영하는 사람이 $(1, 0)$에서 출발하여 항상 원점에 있는 선착장을 향해 속력 2로 헤엄치고, 강물은 $+y$ 방향으로 속력 1로 흐르며 그녀를 떠민다. 그녀의 경로는 $dy/dx = (y - \tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)})/x$를 만족한다. 경로를 구하시오. 그녀는 선착장에 도착하는가? 최대 표류 거리는 얼마인가?

오일러법

16. 공기 저항 받는 낙하. 낙하하는 물체가 $dv/dt = 9.8 - 0.2v^2$, $v(0) = 0$을 만족한다. $h = 0.1$인 오일러법으로 $v(0.5)$를 추정하시오. 정확해 $v = 7\tanh(1.4t)$와 비교하고, 종단 속력을 구하시오.

17. 한계까지 잡는 어획. 일정한 양을 어획하는 물고기 개체군이 $P' = 0.5P(1 - P/8) - 1$, $P(0) = 2$를 만족한다. $h = 0.5$인 오일러법으로 $P(2)$를 추정하시오. 그다음 방정식을 정확히 풀어 개체군이 멸종하는 시점을 구하시오.

18. 계절성 유입. 연못 속 오염물질의 양 $y(t)$가 $y' = 1 + \sin t - 0.5y$, $y(0) = 0$을 만족한다. $h = 0.5$인 오일러법으로 $y(2)$를 추정하고, 장기 거동을 설명하시오.

선형 모델

19. 탄소 연대 측정. 고대 화덕 유적에서 나온 숯에 탄소-14가 원래 양의 30%만 남아 있다. C-14의 반감기는 5730년이다. 이 숯의 나이를 추정하시오.

20. 정맥 주사 투여. 약물을 정맥 점적 주사로 2 mg/h씩 투여하며, 약물은 체내 양에 비례하는 속도로 제거된다(비례상수 0.25 /h). y(0) = 0일 때 y(t)와 장기적인 약물량, 그리고 y가 그 값의 90%에 도달하는 시점을 구하시오.

21. 사망 시각 추정. 실온이 20 °C인 방에서 체온이 30 °C인 시신이 발견되었고, 1시간 후 체온은 28 °C였다. 뉴턴 냉각 법칙과 정상 체온 37 °C를 가정하여, 발견되기 얼마 전에 사망했는지 추정하시오.

비선형 모델

22. 소문의 확산. 인구 1000명인 마을에서 소문이, 소문을 들은 사람 수와 듣지 못한 사람 수의 곱에 비례하는 속도로 퍼진다. 처음에는 10명이 알고 있었고, 2일 후에는 100명이 알게 되었다. 마을 사람의 절반이 소문을 알게 되는 시점을 구하시오.

23. 종양 성장(곰페르츠). 종양의 부피 $y(t)$가 곰페르츠 모델 $dy/dt = 0.5y(\ln 8 - \ln y)$, $y(0) = 1$을 따른다. $y(t)$와 극한 크기, 그리고 그 크기의 절반에 도달하는 시점을 구하시오.

24. 원뿔형 탱크 배수. 꼭짓점이 아래를 향한 원뿔형 탱크에서 꼭짓점의 구멍으로 물이 빠져나간다. 토리첼리 법칙에 의해 수심은 $dh/dt = -3h^{-3/2}$ (ft, 분)를 만족하고, $h(0) = 4$이다. 탱크가 완전히 비는 시점을 구하시오.

연립 미분방정식

25. 연결된 두 탱크. 10 L 탱크 두 개가 있다. 순수한 물이 A로 2 L/분 유입되고, A→B로 3 L/분, B→A로 1 L/분 흐르며, B에서 2 L/분 배출된다. 처음에 탱크 A에는 소금 5 kg이 녹아 있고 B에는 소금이 없다. 연립 미분방정식을 세우고 B 속 소금의 최댓값을 구하시오.

26. 전염병 (SIR). SIR 모델 (S, I는 천 명 단위) $S' = -0.5SI$, $I' = 0.5SI - I$에서 $S(0) = 9.9$, $I(0) = 0.1$이다. 감염자 수의 최댓값과 끝까지 감염되지 않는 사람의 수를 구하시오.

27. 란체스터 전투. 두 군대가 전투를 벌인다: $x' = -2y$, $y' = -x$ (단위: 천 명), $x(0) = 6$, $y(0) = 4$. Y군은 병사 1인당 전투력이 X군의 두 배이다. 어느 쪽이 이기며, 몇 명이 살아남는가?

풀이

방향장과 자율 미분방정식

1. 앨리 효과

- 평형해: $P = 0, 1, 5$ (우변의 근).
- P'의 부호: $(0, 1)$에서 음, $(1, 5)$에서 양, $(5, \infty)$에서 음.
- 따라서 $P = 0$과 $P = 5$는 안정(끌개), $P = 1$은 불안정(밀개)이다.
- $P(0) = 0.8$은 임계값 1보다 작으므로 P는 0으로 감소한다(멸종).
- $P(0) = 1.2$는 1보다 크므로 P는 환경 수용력 5를 향해 증가한다.
- (이러한 임계 현상을 앨리 효과라 한다.)

> 답: $P = 0$ 안정, $P = 1$ 불안정, $P = 5$ 안정 / $P(0) = 0.8 \to$ 멸종; $1.2 \to 5$로 증가

2. 실내 온도 변화

- 이 방정식은 1계 선형이다: $T' + 0.5T = 2.5 + 1.5 \sin t$.
- 모든 해 = 과도항 $Ce^{-t/2}$ + 하나의 주기적인 정상상태 해.
- 정상상태: $T_p = 5 + (1.5/1.25)(0.5 \sin t - \cos t) = 5 + 1.342 \sin(t - 1.107)$.
- 따라서 어떤 초깃값에서 출발하더라도 T는 결국 ≈ 3.66과 ≈ 6.34 사이에서 진동하게 된다.
- 진폭 $3 \cdot 0.5/\sqrt{(0.25 + 1)} = 1.34 < 3$: 건물이 바깥 온도의 변동을 줄이고 지연시킨다.

> 답: 모든 해가 하나의 주기해로 수렴 / T는 5 ± 1.34로 진동 (바깥보다 작고 늦음)

3. 새는 물탱크

- 평형해: $1 - \sqrt{h} = 0 \Rightarrow h = 1$.
- $0 \le h < 1$이면 $h' > 0$ (수위 상승), $h > 1$이면 $h' < 0$ (수위 하강).
- 따라서 $h = 1$은 점근적으로 안정하다.
- $h(0) = 0$이면 1을 향해 상승하고, $h(0) = 4$이면 1을 향해 하강한다. 어느 쪽도 $h = 1$을 넘지 않는다.
- 유입률이 a이면 평형해는 $h = a^2$이다.

> 답: 평형해 $h = 1$ (유입 = 유출) / 안정: $h(0) = 0, 4$ 모두 1로 수렴

변수분리형 미분방정식

4. 방사성 붕괴

- 변수분리: $dm/m = -k\,dt \Rightarrow m = 10e^{-kt}$.
- $m(3) = 8 \Rightarrow e^{-3k} = 0.8 \Rightarrow k = \ln(5/4)/3 \approx 0.07438$ (1/일).
- 반감기: $t_{1/2} = \ln 2 / k \approx 9.32$일.
- $m = 1 \Rightarrow e^{-kt} = 0.1 \Rightarrow t = \ln 10 / k \approx 30.96$일.

> 답: $k = \ln(5/4)/3 \approx 0.0744$, $t_{1/2} \approx 9.32$일 / $t = \ln 10 / k \approx 31.0$일에 1 g

5. 시동 끈 보트

- 변수분리: $dv/v^2 = -0.1\,dt \Rightarrow 1/v = 0.1t + 1/5 \Rightarrow v = 5/(1 + 0.5t)$.
- $v = 1 \Rightarrow 1 + 0.5t = 5 \Rightarrow t = 8$ s.
- 이동 거리: $\int_0^8 5/(1 + 0.5t)\,dt = 10 \ln(1 + 0.5t)\,|_0^8 = 10 \ln 5 \approx 16.1$ m.
- 모든 t에서 $v > 0$이지만, 이동 거리 $10 \ln(1 + 0.5t)$는 한없이 커진다.

> 답: $v = 5/(1 + 0.5t) \to t = 8$ s에 $v = 1$ / 거리 $10 \ln 5 \approx 16.1$ m (끝내 안 멈춤)

6. 계절 따라 변하는 개체 수

- 변수분리: $dP/P = 0.5 \cos t\,dt \Rightarrow \ln P = 0.5 \sin t + C$.
- $P(0) = 2 \Rightarrow P = 2e^{0.5 \sin t}$.
- $\sin t = 1$일 때 최대: $P = 2e^{0.5} \approx 3.30$; $\sin t = -1$일 때 최소: $P = 2e^{-0.5} \approx 1.21$.
- 개체 수는 주기 2π인 주기함수이다(장기적인 증가는 없다).

> 답: $P = 2e^{0.5 \sin t}$ / $2e^{-0.5} \approx 1.21 \sim 2e^{0.5} \approx 3.30$ 진동

1계 선형 미분방정식

7. 오염된 호수

- 1계 선형: $y' + 0.5y = 2e^{-0.5t}$, 적분인자 $\mu = e^{0.5t}$.
- $(e^{0.5t} y)' = 2 \Rightarrow e^{0.5t} y = 2t \Rightarrow y = 2t\,e^{-0.5t}$.
- $y' = 2e^{-0.5t}(1 - 0.5t) = 0 \Rightarrow t = 2$.
- 최댓값 $y(2) = 4e^{-1} \approx 1.47$ kg.

> 답: 적분인자 $e^{t/2}$: $y = 2t\,e^{-t/2}$ / $t = 2$일에 최대: $y = 4/e \approx 1.47$ kg

8. 적립식 저축

- 1계 선형: $A' - 0.05A = 0.2$, $\mu = e^{-0.05t}$.
- $(e^{-0.05t}A)' = 0.2e^{-0.05t} \Rightarrow A = -4 + Ce^{0.05t}$; $A(0) = 0 \Rightarrow C = 4$.
- $A = 4(e^{0.05t} - 1)$.
- $A = 5 \Rightarrow e^{0.05t} = 2.25 \Rightarrow t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$년.

> 답: $A = 4(e^{0.05t} - 1)$ ($\times$ \$10,000) / $t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$년에 $A = 5$

9. 교류 전원 RL 회로

- $\mu = e^{2t}$: $(e^{2t} i)' = 4e^{2t} \sin t$.
- $\int e^{2t} \sin t\,dt = e^{2t}(2 \sin t - \cos t)/5$.
- $i = 0.8(2 \sin t - \cos t) + Ce^{-2t}$; $i(0) = 0 \Rightarrow C = 0.8$.
- 과도항 $0.8e^{-2t} \to 0$; 정상상태 $0.8(2 \sin t - \cos t)$의 진폭은 $0.8\sqrt{5} = 4/\sqrt{5} \approx 1.79$ A.

> 답: $i = 0.8(2 \sin t - \cos t) + 0.8e^{-2t}$ / 과도항 소멸; 진폭 $4/\sqrt{5} \approx 1.79$ A

완전 미분방정식

10. 입자의 경로

- $M_y = 1 = N_x$이므로 완전 미분방정식이다.
- $F = x^2 + xy + y^2$: $F_x = 2x + y$, $F_y = x + 2y$.
- $(1, 1)$을 지나므로 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 즉 회전된 타원이다.
- 최고점: $dy/dx = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow (-1, 2)$.

> 답: 완전: $x^2 + xy + y^2 = 3$ (기울어진 타원) / 최고점 $(-1, 2)$

11. 경화 스프링

- $(x + x^3)dx + v\,dv = 0$으로 쓰면 $M_v = 0 = N_x$이므로 완전 미분방정식이다.
- $F = x^2/2 + x^4/4 + v^2/2 = C$ (총 에너지).
- $x = 1$, $v = 0$에서 $C = 1/2 + 1/4 = 3/4$.
- 속력은 $x = 0$에서 최대: $v^2/2 = 3/4 \Rightarrow v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$.
- 닫힌 곡선이므로 물체는 $x = -1$과 $x = 1$ 사이에서 주기적으로 진동한다.

> 답: $v^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = 3/4$ (에너지) / $x = 0$에서 최대: $v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$

12. 유체의 유선

- $M_y = 2$, $N_x = 1$이므로 완전 미분방정식이 아니다. $(M_y - N_x)/N = 1/x$가 x만의 함수이므로 $\mu = x$.
- $x(2y + 3x)dx + x^2\,dy = 0$은 $F = x^2y + x^3$인 완전 미분방정식이다.
- $(1, 1)$을 지나므로 $x^2y + x^3 = 2 \Rightarrow y = 2/x^2 - x$.
- $y = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$.

> 답: 완전 아님; $\mu = x$: $x^2y + x^3 = 2$ / x축과 만나는 점: $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$

치환에 의한 풀이

13. 물고기 성장(베르탈란피)

- $n = 2/3$인 베르누이 방정식이다. $u = W^{1/3}$로 치환하면 $u' = (1/3)W^{-2/3}W' = (2 - u)/3$.
- $u = 2 - Ce^{-t/3}$; $u(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.
- $W = (2 - e^{-t/3})^3 \to 8$ kg $(t \to \infty)$.
- $W = 4 \Rightarrow 2 - e^{-t/3} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow t = -3\ln(2 - \sqrt[3]{4}) \approx 2.66$.

> 답: 베르누이, $u = W^{1/3}$: $W = (2 - e^{-t/3})^3$ / $W \to 8$ kg; $t \approx 2.66$에 $W = 4$

14. 직교 궤적

- 원: $2x + 2yy' = 2c$, $2c = (x^2 + y^2)/x \Rightarrow y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$.
- 직교하는 기울기: $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$ (동차형).
- $y = ux$: $u + xu' = 2u/(1 - u^2) \Rightarrow (1 - u^2)du/(u(1 + u^2)) = dx/x$.
- 적분: $\ln u - \ln(1 + u^2) = \ln x + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ky$ (x축에 접하는 원).
- $(1, 1/2)$: $1 + 1/4 = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.5y$, 즉 $x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$.

> 답: 동차형, $y = ux$: $x^2 + y^2 = 2ky$ / $(1, 1/2)$ 통과: $x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$

15. 강 건너 헤엄치기

- 동차형: $y = ux$로 치환하면 $xu' = -\frac{1}{2}\sqrt{(1 + u^2)}$.
- $\int du/\sqrt{(1 + u^2)} = -\frac{1}{2} \ln x + C \Rightarrow \ln(u + \sqrt{(1 + u^2)}) = -\frac{1}{2} \ln x$ ($x = 1$에서 $u = 0$).
- $u + \sqrt{(1 + u^2)} = x^{-1/2} \Rightarrow u = (x^{-1/2} - x^{1/2})/2$.
- $y = ux = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to 0$ ($x \to 0$): 선착장에 도착한다.
- $y' = 0 \Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow$ 최대 표류 $y = \frac{1}{2}(1/\sqrt{3} - 1/(3\sqrt{3})) = 1/(3\sqrt{3}) \approx 0.192$.

> 답: $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to$ 선착장 도착 / $x = 1/3$에서 최대 표류: $y \approx 0.192$

오일러법

16. 공기 저항 받는 낙하

- $v_{n+1} = v_n + 0.1(9.8 - 0.2v_n^2)$.
- $v_1 = 0.98$, $v_2 = 1.9408$, $v_3 = 2.8455$, $v_4 = 3.6635$, $v_5 = 4.3751$.
- 정확해: $v(0.5) = 7 \tanh 0.7 \approx 4.2306$ (오일러법이 과대추정, 오차 ≈ 0.14).
- 종단 속력: $v' = 0 \Rightarrow v = \sqrt{(9.8/0.2)} = 7$ m/s.

> 답: 오일러 0.98, 1.94, 2.85, 3.66 → 4.38 / 정확해 4.23, 종단 속력 7 m/s

17. 한계까지 잡는 어획

- 오일러: $P_1 = 1.875$, $P_2 = 1.7339$, $P_3 = 1.5734$, $P_4 = 1.3894 \approx P(2)$.
- 정확한 풀이: $0.5P - P^2/16 - 1 = -(P - 4)^2/16$ ($P = 4$는 반안정).
- $u = P - 4$: $u' = -u^2/16 \Rightarrow 1/u = t/16 - 1/2 \Rightarrow P = 4 + 16/(t - 8)$.
- $P(2) = 4 - 16/6 = 4/3 \approx 1.333$. $P = 0$이 되려면 $t - 8 = -4 \Rightarrow t = 4$.
- 교훈: $P = 4$ 아래에서는 적은 어획량도 개체군을 멸종으로 몰아간다.

> 답: 1.875, 1.734, 1.573, 1.389 (정확해 4/3) / $P' = -(P - 4)^2/16 \to t = 4$에 붕괴

18. 계절성 유입

- 오일러: $y_1 = 0.5$, $y_2 = 1.1147$, $y_3 = 1.7568$, $y_4 = 2.3163 \approx y(2)$.
- 이 방정식은 1계 선형이며, 정확한 값은 $y(2) \approx 2.2552$이다.
- 정상상태: $y = 2 + 0.4 \sin t - 0.8 \cos t$, 진폭 $1/\sqrt{1.25} \approx 0.894$.
- 따라서 y는 2를 중심으로 ≈ 1.11과 ≈ 2.89 사이에서 진동한다.

> 답: 0.5, 1.115, 1.757, 2.316 (정확해 2.255) / $y \approx 2 + 0.894 \sin(t - 1.107)$

선형 모델

19. 탄소 연대 측정

- $A(t) = A_0 e^{-kt}$, $A(5730) = A_0/2 \Rightarrow k = \ln 2 / 5730 \approx 1.2097 \times 10^{-4}$.
- $A = 0.3A_0 \Rightarrow e^{-kt} = 0.3 \Rightarrow t = \ln(1/0.3)/k$.
- $t = 5730 \cdot \ln(10/3)/\ln 2 \approx 9{,}953$년.
- (그래프: t는 천 년 단위, y = 남은 비율(%) ÷ 10.)

> 답: $k = \ln 2 / 5730 \approx 1.21 \times 10^{-4}$ /년 / $t = \ln(1/0.3)/k \approx 9{,}950$년

20. 정맥 주사 투여

- $y' + 0.25y = 2 \Rightarrow y = 8 + Ce^{-t/4}$; $y(0) = 0 \Rightarrow C = -8$.
- $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to 8$ mg.
- $0.9 \cdot 8 \Rightarrow e^{-t/4} = 0.1 \Rightarrow t = 4 \ln 10 \approx 9.21$ h.
- 주입 속도를 두 배로 하면 약물 수준은 두 배가 되지만, 90%에 도달하는 시간은 변하지 않는다.

> 답: $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to 8$ mg에 수렴 / $t = 4 \ln 10 \approx 9.2$ h에 90% 도달

21. 사망 시각 추정

- 발견 시각을 t = 0으로 하면 $T - 20 = 10e^{-kt}$.
- $28 - 20 = 10e^{-k} \Rightarrow k = \ln(10/8) \approx 0.2231$ (1/h).
- 사망 시 T = 37: $17 = 10e^{-kt} \Rightarrow t = -\ln 1.7 / k \approx -2.38$.
- 사망 시각은 발견 약 2.38 h(2시간 23분) 전이다.
- (그래프: 온도는 10 °C 단위, 사망 시각부터 시작.)

> 답: $k = \ln(10/8) \approx 0.223$ /h / 약 2.38 h (2시간 23분) 전 사망

비선형 모델

22. 소문의 확산

- 로지스틱: $x = 1000/(1 + Ce^{-1000kt})$, $x(0) = 10 \Rightarrow C = 99$.
- $x(2) = 100 \Rightarrow 1 + 99e^{-2000k} = 10 \Rightarrow 1000k = \ln 11 / 2 \approx 1.199$.
- $x = 500 \Rightarrow 99e^{-1000kt} = 1 \Rightarrow t = \ln 99 / (1000k) = 2 \ln 99 / \ln 11 \approx 3.83$일.
- (그래프: x는 백 명 단위.)

> 답: $x = 1000/(1 + 99e^{-1000kt})$ / 절반: $t = 2 \ln 99/\ln 11 \approx 3.83$일

23. 종양 성장(곰페르츠)

- $z = \ln y$로 치환: $z' = y'/y = 0.5(\ln 8 - z)$, $z(0) = 0$.
- $z = \ln 8\,(1 - e^{-t/2}) \Rightarrow y = 8^{1 - e^{\wedge\{-t/2\}}} \to 8$.
- $y = 4 \Rightarrow 1 - e^{-t/2} = 2/3 \Rightarrow t = 2 \ln 3 \approx 2.20$.

> 답: $\ln y = \ln 8\,(1 - e^{-t/2}) \to y \to 8$ / $t = 2 \ln 3 \approx 2.20$에 $y = 4$

24. 원뿔형 탱크 배수

- 변수분리: $h^{3/2}\,dh = -3\,dt \Rightarrow (2/5)h^{5/2} = -3t + C$.
- $h(0) = 4 \Rightarrow C = (2/5)\cdot 32 \Rightarrow h^{5/2} = 32 - 7.5t$.
- 완전히 빔: $h = 0 \Rightarrow t = 32/7.5 \approx 4.27$분.
- 바닥 근처(원뿔의 좁은 부분)에서 수위가 더 빨리 내려간다.

> 답: $h^{3/2}dh = -3dt \to h^{5/2} = 32 - 7.5t$ / $t = 32/7.5 \approx 4.27$분에 완전히 빔

연립 미분방정식

25. 연결된 두 탱크

- $x' = -(3/10)x + (1/10)y$, $y' = (3/10)x - (3/10)y$.
- 고윳값: $(\lambda + 0.3)^2 = 0.03 \Rightarrow \lambda = -0.3 \pm 0.1732$: 둘 다 음수 $\Rightarrow (x, y) \to (0, 0)$.
- B는 $y' = 0$일 때 최대 $\Rightarrow y = x$ (상궤적 위에서).
- 수치 계산: $t \approx 3.8$분에 $y_{max} \approx 1.96$ kg.

> 답: 고윳값 $-0.3 \pm 0.1\sqrt{3}$ 둘 다 음수 → 소금 배출 / B 최대 ≈ 1.96 kg ($t \approx 3.8$분)

26. 전염병 (SIR)

- $dI/dS = (0.5SI - I)/(-0.5SI) = -1 + 2/S \Rightarrow I = -S + 2 \ln S + C$.
- $C = 10 - 2 \ln 9.9 \Rightarrow I = 10 - S + 2 \ln(S/9.9)$.
- I는 $S = 2$일 때 최대: $I_{max} = 8 + 2 \ln(2/9.9) \approx 4.80$ (천 명).
- $I = 0$이 되면 유행이 끝난다: $10 - S + 2 \ln(S/9.9) = 0 \Rightarrow S\infty \approx 0.069$ (천 명) ≈ 69명.

> 답: $dI/dS = -1 + 2/S \to I_{max} \approx 4.80$ / 끝까지 비감염: $S\infty \approx 0.069$ (≈ 69명)

27. 란체스터 전투

- $dx/dy = 2y/x \Rightarrow x\,dx = 2y\,dy \Rightarrow x^2 - 2y^2 = C$ (란체스터 제곱 법칙).
- $C = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ Y가 먼저 0이 된다.
- $y = 0$일 때: $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$천 명 생존.
- 수치 계산하면 전투는 $t \approx 1.25$에 끝난다. (Y가 이기려면 전투력이 2.25보다 커야 한다.)

> 답: $x^2 - 2y^2 = 4$ (란체스터 제곱 법칙) / X군 승리, 2천 명 생존 ($t \approx 1.25$)