1階微分方程式の応用問題

SnackLab 演習問題・1階微分方程式・応用問題 27 問と解答・snacklab.dev

SnackLab オリジナルの演習問題です。方向場から連立微分方程式までテーマ別に並べ、すべての答えは数値計算で検算しました。各問題は SnackLab のショート動画でグラフを使って解説しており、SnackLab アプリの d/dx モードで確かめられます。

方向場と自励系

1. アリー効果　小動物の個体数 P(t)（百匹単位）が $dP/dt = 0.2P(P-1)(5-P)$ に従うとする。平衡解をすべて求め、それぞれの安定性を判定せよ。また、$P(0) = 0.8$ の場合と $P(0) = 1.2$ の場合にどうなるかを述べよ。

2. 室温の周期変動　建物の室温 T(t) はニュートンの冷却法則 $T' = 0.5(A(t) - T)$ に従い、外気温は $A(t) = 5 + 3\sin t$（スケール単位）である。方向場を用いて、$T(0) = 0$ および $T(0) = 10$ のときの長期的な挙動を述べよ。また、T の長期的な振幅を求めよ。

3. 穴のあいたタンク　一定の割合で水が流入し、同時に穴から水が漏れ出すタンクがある。水深 h(t) は $dh/dt = 1 - \sqrt{h}$ を満たす。平衡水深を求め、安定かどうかを判定せよ。また、タンクが空の状態から始まる場合と、水深 4 から始まる場合にどうなるかを述べよ。

変数分離形

4. 放射性崩壊　質量 10 g の放射性試料がある。3 日後には 8 g が残っていた。$dm/dt = -km$ を仮定して、半減期と、残りが 1 g になるまでの時間を求めよ。

5. 惰性で進むボート　速さ 5 m/s で進むボートのエンジンを止めると、ボートは惰性で進む。水の抵抗により $dv/dt = -0.1v^2$ が成り立つ。速さが 1 m/s まで落ちるのはいつか。また、それまでにボートが進む距離を求めよ。

6. 季節で変わる個体数　季節によって増加率が変化する個体数が $dP/dt = 0.5P\cos t$, $P(0) = 2$ を満たす。$P(t)$ を求め、その最大値と最小値を求めよ。

1階線形微分方程式

7. 汚染された湖　ある湖には汚染物質が減少していく割合 $2e^{-0.5t}$ kg/日 で流入し、同時に 0.5y kg/日 の割合で流出する：$y' = 2e^{-0.5t} - 0.5y$, $y(0) = 0$。y(t) を求め、汚染が最大となる時刻を求めよ。

8. 積立預金　連続複利で年利 5% の口座に、年 $2,000 の割合で連続的に入金する。A を $10,000 単位で表すと $A' = 0.05A + 0.2$, $A(0) = 0$ となる。残高が $50,000 に達するのはいつか。

9. 交流電源の RL 回路　直列 RL 回路で L = 1 H, R = 2 Ω、電源電圧 $E(t) = 4 \sin t$ V、$i(0) = 0$ とする。このとき $i' + 2i = 4 \sin t$ が成り立つ。i(t) と定常電流の振幅を求めよ。

完全微分方程式

10. 粒子の軌跡　平面上を運動する粒子が、$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ を満たす曲線に沿って動き、点 $(1, 1)$ を通る。この曲線とその最高点を求めよ。

11. 硬化ばね　硬化ばねにつけた質点は $v\,dv/dx = -(x + x^3)$ を満たす。ここで v は位置 x における速度である。質点を $x = 1$ から静かに放すとき、(x, v) 平面上のエネルギー曲線と最大の速さを求めよ。

12. 流れの流線　平面流の流線は $(2y + 3x)dx + x\,dy = 0$ を満たす。点 $(1, 1)$ を通る流線を求め、それが x 軸と交わる点を求めよ。

置換による解法

13. 魚の成長（ベルタランフィ）　魚の体重 $W(t)$ (kg) はフォン・ベルタランフィのモデル $dW/dt = 2W^{2/3} - W$, $W(0) = 1$ に従う。$W(t)$、極限の体重、および $W = 4$ となる時刻を求めよ。

14. 直交曲線　力線は等電位線である円 $x^2 + y^2 = 2cx$ と直交する。力線が $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$ を満たすことを示し、この方程式を解いて、点 $(1, 1/2)$ を通る力線を求めよ。

15. 川を泳いで渡る　泳者が点 $(1, 0)$ から出発し、速さ 2 で常に原点にある桟橋に向かって泳ぐ。一方、川の流れが速さ 1 で泳者を $+y$ 方向に流す。泳者の経路は $dy/dx = (y - \tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2 + y^2)})/x$ を満たす。経路を求めよ。泳者は桟橋にたどり着けるか。また、最も流されたときの y の値を求めよ。

オイラー法

16. 空気抵抗のある落下　落下する物体が $dv/dt = 9.8 - 0.2v^2$, $v(0) = 0$ を満たす。刻み幅 $h = 0.1$ のオイラー法で $v(0.5)$ を推定せよ。また、厳密解 $v = 7\tanh(1.4t)$ と比較し、終端速度を求めよ。

17. 限界ぎりぎりの漁獲　一定量の漁獲を受ける魚の個体数が $P' = 0.5P(1 - P/8) - 1$, $P(0) = 2$ を満たす。刻み幅 $h = 0.5$ のオイラー法で $P(2)$ を推定せよ。次に厳密に解き、個体数が 0 になる時刻を求めよ。

18. 季節的な流入　池に含まれる汚染物質の量 $y(t)$ が $y' = 1 + \sin t - 0.5y$, $y(0) = 0$ を満たす。刻み幅 $h = 0.5$ のオイラー法で $y(2)$ を推定し、長期的な挙動を述べよ。

線形モデル

19. 放射性炭素年代測定　古代のたき火跡から出土した木炭には、もとの量の 30% の炭素14が残っている。C-14 の半減期は 5730 年である。この木炭の年代を推定せよ。

20. 点滴による投薬　薬を点滴で 2 mg/h の割合で投与する。薬は体内の量に比例する割合で排出される（速度定数 0.25 /h）。y(0) = 0 として、y(t)、長期的な量、および y がその 90% に達する時刻を求めよ。

21. 死亡推定時刻　室温 20 °C の部屋で遺体が発見され、そのときの体温は 30 °C、1 時間後には 28 °C であった。ニュートンの冷却法則が成り立ち、平常の体温を 37 °C として、死亡が発見の何時間前であったかを推定せよ。

非線形モデル

22. うわさの広がり　人口 1000 人の町で、うわさが「すでに聞いた人数」と「まだ聞いていない人数」の積に比例する速さで広がる。最初は 10 人が知っており、2 日後には 100 人が知っていた。町の半数が知るのはいつか。

23. 腫瘍の成長（ゴンペルツ）　腫瘍の体積 $y(t)$ はゴンペルツモデル $dy/dt = 0.5y(\ln 8 - \ln y)$, $y(0) = 1$ に従う。$y(t)$、極限の大きさ、およびその半分の大きさに達する時刻を求めよ。

24. 円錐タンクの排水　逆円錐形のタンクの頂点にある穴から水が排出される。トリチェリの法則により、水深は $dh/dt = -3h^{-3/2}$（ft, 分）, $h(0) = 4$ を満たす。タンクが空になるのはいつか。

連立微分方程式

25. つながった2つのタンク　容量 10 L のタンク A, B がある。A には純水が 2 L/分 で流入し、A→B へ 3 L/分、B→A へ 1 L/分 で流れ、B からは 2 L/分 で流出する。最初、A には塩 5 kg が溶けており、B には塩が含まれていない。連立微分方程式を立て、B の塩の最大量を求めよ。

26. 感染症（SIR モデル）　SIR モデル（S, I は千人単位）$S' = -0.5SI$, $I' = 0.5SI - I$, $S(0) = 9.9$, $I(0) = 0.1$ において、感染者数のピークと、最後まで感染しない人数を求めよ。

27. ランチェスターの戦闘モデル　2 つの軍が戦い、兵力（千人単位）は $x' = -2y$, $y' = -x$, $x(0) = 6$, $y(0) = 4$ に従う。Y 軍は兵士1人あたりの戦闘力が X 軍の 2 倍である。どちらが勝つか。また、残る兵士は何人か。

解答

方向場と自励系

1. アリー効果

- 平衡解：$P = 0, 1, 5$（右辺の零点）。
- P' の符号：$(0, 1)$ で負、$(1, 5)$ で正、$(5, \infty)$ で負。
- よって $P = 0$ と $P = 5$ は安定（吸引的）、$P = 1$ は不安定（反発的）。
- $P(0) = 0.8$ はしきい値 1 より下 → P は 0 へ減少（絶滅）。
- $P(0) = 1.2$ は 1 より上 → P は環境収容力 5 へ増加。
- （このような臨界しきい値の存在をアリー効果という。）

> 答: $P = 0$ 安定, $P = 1$ 不安定, $P = 5$ 安定 / $P(0) = 0.8 \to$ 絶滅； $P(0) = 1.2 \to 5$ へ

2. 室温の周期変動

- 方程式は1階線形：$T' + 0.5T = 2.5 + 1.5 \sin t$。
- すべての解 = 過渡項 $Ce^{-t/2}$ + ただ1つの周期的な定常解。
- 定常解：$T_p = 5 + (1.5/1.25)(0.5 \sin t - \cos t) = 5 + 1.342 \sin(t - 1.107)$。
- よって初期値によらず、T は ≈ 3.66 と ≈ 6.34 の間の振動に落ち着く。
- 振幅 $3 \cdot 0.5/\sqrt{(0.25 + 1)} = 1.34 < 3$：建物は外気温の変動を弱め、遅らせる。

> 答: どの解も1つの周期解に近づく / T は 5 ± 1.34 で振動（外気 ± 3 より小・遅れ）

3. 穴のあいたタンク

- 平衡解：$1 - \sqrt{h} = 0 \Rightarrow h = 1$。
- $0 \le h < 1$ では $h' > 0$（水位上昇）、$h > 1$ では $h' < 0$（水位下降）。
- したがって $h = 1$ は漸近安定。
- $h(0) = 0$ なら 1 へ上昇、$h(0) = 4$ なら 1 へ下降。どちらも $h = 1$ を横切らない。
- 流入率が a のとき、平衡解は $h = a^2$。

> 答: 平衡解 $h = 1$（流入 = 流出） / 安定：$h(0) = 0$ でも 4 でも水位は 1 へ

変数分離形

4. 放射性崩壊

- 変数分離：$dm/m = -k\,dt \Rightarrow m = 10e^{-kt}$。
- $m(3) = 8 \Rightarrow e^{-3k} = 0.8 \Rightarrow k = \ln(5/4)/3 \approx 0.07438$ /日。
- 半減期：$t_{1/2} = \ln 2 / k \approx 9.32$ 日。
- $m = 1 \Rightarrow e^{-kt} = 0.1 \Rightarrow t = \ln 10 / k \approx 30.96$ 日。

> 答: $k = \ln(5/4)/3 \approx 0.0744$ /日, 半減期 ≈ 9.32 日 / 1 g になるのは $t = \ln 10 / k \approx 31.0$ 日

5. 惰性で進むボート

- 変数分離：$dv/v^2 = -0.1\,dt \Rightarrow 1/v = 0.1t + 1/5 \Rightarrow v = 5/(1 + 0.5t)$。
- $v = 1 \Rightarrow 1 + 0.5t = 5 \Rightarrow t = 8$ s。
- 距離：$\int_0^8 5/(1 + 0.5t)\,dt = 10 \ln(1 + 0.5t)\,|_0^8 = 10 \ln 5 \approx 16.1$ m。
- すべての t で $v > 0$ だが、距離 $10 \ln(1 + 0.5t)$ は限りなく増加する。

> 答: $v = 5/(1 + 0.5t)$ → $t = 8$ s で $v = 1$ / 距離 $= 10 \ln 5 \approx 16.1$ m（停止はしない）

6. 季節で変わる個体数

- 変数分離：$dP/P = 0.5 \cos t\,dt \Rightarrow \ln P = 0.5 \sin t + C$。
- $P(0) = 2 \Rightarrow P = 2e^{0.5 \sin t}$。
- $\sin t = 1$ のとき最大：$P = 2e^{0.5} \approx 3.30$、$\sin t = -1$ のとき最小：$P = 2e^{-0.5} \approx 1.21$。
- 個体数は周期 2π で変動する（長期的には増加しない）。

> 答: $P = 2e^{0.5 \sin t}$ / $2e^{-0.5} \approx 1.21$ と $2e^{0.5} \approx 3.30$ の間で振動

1階線形微分方程式

7. 汚染された湖

- 1階線形：$y' + 0.5y = 2e^{-0.5t}$、積分因子 $\mu = e^{0.5t}$。
- $(e^{0.5t} y)' = 2 \Rightarrow e^{0.5t} y = 2t \Rightarrow y = 2t\,e^{-0.5t}$。
- $y' = 2e^{-0.5t}(1 - 0.5t) = 0 \Rightarrow t = 2$。
- 最大値 $y(2) = 4e^{-1} \approx 1.47$ kg。

> 答: 積分因子 $e^{t/2}$：$y = 2t\,e^{-t/2}$ / $t = 2$ 日で最大：$y = 4/e \approx 1.47$ kg

8. 積立預金

- 1階線形：$A' - 0.05A = 0.2$、$\mu = e^{-0.05t}$。
- $(e^{-0.05t}A)' = 0.2e^{-0.05t} \Rightarrow A = -4 + Ce^{0.05t}$；$A(0) = 0 \Rightarrow C = 4$。
- $A = 4(e^{0.05t} - 1)$。
- $A = 5 \Rightarrow e^{0.05t} = 2.25 \Rightarrow t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$ 年。

> 答: $A = 4(e^{0.05t} - 1)$ (× \$10,000) / $t = 20 \ln 2.25 \approx 16.2$ 年で $A = 5$

9. 交流電源の RL 回路

- $\mu = e^{2t}$：$(e^{2t} i)' = 4e^{2t} \sin t$。
- $\int e^{2t} \sin t\,dt = e^{2t}(2 \sin t - \cos t)/5$。
- $i = 0.8(2 \sin t - \cos t) + Ce^{-2t}$；$i(0) = 0 \Rightarrow C = 0.8$。
- 過渡項 $0.8e^{-2t} \to 0$；定常解 $0.8(2 \sin t - \cos t)$ の振幅は $0.8\sqrt{5} = 4/\sqrt{5} \approx 1.79$ A。

> 答: $i = 0.8(2 \sin t - \cos t) + 0.8e^{-2t}$ / 過渡項は消え、振幅は $4/\sqrt{5} \approx 1.79$ A

完全微分方程式

10. 粒子の軌跡

- $M_y = 1 = N_x$ より、この方程式は完全形。
- $F = x^2 + xy + y^2$：$F_x = 2x + y$, $F_y = x + 2y$。
- $(1, 1)$ を通るので $x^2 + xy + y^2 = 3$（回転した楕円）。
- 最高点：$dy/dx = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow (-1, 2)$。

> 答: 完全形：$x^2 + xy + y^2 = 3$（傾いた楕円） / 最高点は $(-1, 2)$

11. 硬化ばね

- $(x + x^3)dx + v\,dv = 0$ と書くと $M_v = 0 = N_x$ より完全形。
- $F = x^2/2 + x^4/4 + v^2/2 = C$（全エネルギー）。
- $x = 1, v = 0$ より $C = 1/2 + 1/4 = 3/4$。
- 速さは $x = 0$ で最大：$v^2/2 = 3/4 \Rightarrow v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$。
- 閉曲線は $x = -1$ と $x = 1$ の間の周期的な振動を表す。

> 答: 完全形：$v^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = 3/4$（エネルギー） / $x = 0$ で最大：$v = \sqrt{1.5} \approx 1.22$

12. 流れの流線

- $M_y = 2, N_x = 1$：完全形でない。$(M_y - N_x)/N = 1/x$ は x のみの関数 $\Rightarrow \mu = x$。
- $x(2y + 3x)dx + x^2\,dy = 0$ は完全形で $F = x^2y + x^3$。
- $(1, 1)$ を通る：$x^2y + x^3 = 2 \Rightarrow y = 2/x^2 - x$。
- $y = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$。

> 答: 完全形でない → $\mu = x$：$x^2y + x^3 = 2$ / $y = 2/x^2 - x$ は $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$ で $y = 0$

置換による解法

13. 魚の成長（ベルタランフィ）

- $n = 2/3$ のベルヌーイ形。$u = W^{1/3}$ とおくと $u' = (1/3)W^{-2/3}W' = (2 - u)/3$。
- $u = 2 - Ce^{-t/3}$；$u(0) = 1 \Rightarrow C = 1$。
- $W = (2 - e^{-t/3})^3 \to 8$ kg $(t \to \infty)$。
- $W = 4 \Rightarrow 2 - e^{-t/3} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow t = -3\ln(2 - \sqrt[3]{4}) \approx 2.66$。

> 答: ベルヌーイ形, $u = W^{1/3}$：$W = (2 - e^{-t/3})^3$ / $W \to 8$ kg；$W = 4$ となるのは $t \approx 2.66$

14. 直交曲線

- 円：$2x + 2yy' = 2c$, $2c = (x^2 + y^2)/x \Rightarrow y' = (y^2 - x^2)/(2xy)$。
- 直交する傾き：$y' = 2xy/(x^2 - y^2)$（同次形）。
- $y = ux$：$u + xu' = 2u/(1 - u^2) \Rightarrow (1 - u^2)du/(u(1 + u^2)) = dx/x$。
- 積分して $\ln u - \ln(1 + u^2) = \ln x + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ky$（x 軸に接する円）。
- $(1, 1/2)$：$1 + 1/4 = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.5y$、すなわち $x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$。

> 答: 同次形, $y = ux$：$x^2 + y^2 = 2ky$ / $(1, 1/2)$ を通る：$x^2 + (y - 5/4)^2 = 25/16$

15. 川を泳いで渡る

- 同次形：$y = ux$ とおくと $xu' = -\frac{1}{2}\sqrt{(1 + u^2)}$。
- $\int du/\sqrt{(1 + u^2)} = -\frac{1}{2} \ln x + C \Rightarrow \ln(u + \sqrt{(1 + u^2)}) = -\frac{1}{2} \ln x$（$x = 1$ で $u = 0$）。
- $u + \sqrt{(1 + u^2)} = x^{-1/2} \Rightarrow u = (x^{-1/2} - x^{1/2})/2$。
- $y = ux = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to 0$ $(x \to 0)$：桟橋にたどり着く。
- $y' = 0 \Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow$ 最も流されるときの $y = \frac{1}{2}(1/\sqrt{3} - 1/(3\sqrt{3})) = 1/(3\sqrt{3}) \approx 0.192$。

> 答: $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x^{3/2}) \to$ 桟橋にたどり着く / $x = 1/3$ で最も流される：$y \approx 0.192$

オイラー法

16. 空気抵抗のある落下

- $v_{n+1} = v_n + 0.1(9.8 - 0.2v_n^2)$。
- $v_1 = 0.98$, $v_2 = 1.9408$, $v_3 = 2.8455$, $v_4 = 3.6635$, $v_5 = 4.3751$。
- 厳密解：$v(0.5) = 7 \tanh 0.7 \approx 4.2306$（オイラー法は過大評価、誤差 ≈ 0.14）。
- 終端速度：$v' = 0 \Rightarrow v = \sqrt{(9.8/0.2)} = 7$ m/s。

> 答: オイラー法：0.98, 1.94, 2.85, 3.66, 4.38 → $v(0.5) \approx 4.38$ / 厳密解 $7 \tanh(1.4t)$ = 4.23；終端速度 7 m/s

17. 限界ぎりぎりの漁獲

- オイラー法：$P_1 = 1.875$, $P_2 = 1.7339$, $P_3 = 1.5734$, $P_4 = 1.3894 \approx P(2)$。
- 厳密解：$0.5P - P^2/16 - 1 = -(P - 4)^2/16$（$P = 4$ は半安定）。
- $u = P - 4$：$u' = -u^2/16 \Rightarrow 1/u = t/16 - 1/2 \Rightarrow P = 4 + 16/(t - 8)$。
- $P(2) = 4 - 16/6 = 4/3 \approx 1.333$。$P = 0$ となるのは $t - 8 = -4 \Rightarrow t = 4$。
- 教訓：$P = 4$ を下回ると、わずかな漁獲でも資源は絶滅に向かう。

> 答: オイラー法：1.875, 1.734, 1.573, 1.389（厳密解 $P(2) = 4/3$） / $P' = -(P - 4)^2/16$：$P(0) = 2$ は $t = 4$ で絶滅

18. 季節的な流入

- オイラー法：$y_1 = 0.5$, $y_2 = 1.1147$, $y_3 = 1.7568$, $y_4 = 2.3163 \approx y(2)$。
- 方程式は1階線形で、厳密値は $y(2) \approx 2.2552$。
- 定常状態：$y = 2 + 0.4 \sin t - 0.8 \cos t$、振幅 $1/\sqrt{1.25} \approx 0.894$。
- よって y は 2 を中心に ≈ 1.11 と ≈ 2.89 の間で振動する。

> 答: オイラー法：0.5, 1.115, 1.757, 2.316（厳密解 $y(2) \approx 2.255$） / 長期的に $y \approx 2 + 0.894 \sin(t - 1.107)$

線形モデル

19. 放射性炭素年代測定

- $A(t) = A_0 e^{-kt}$, $A(5730) = A_0/2 \Rightarrow k = \ln 2 / 5730 \approx 1.2097 \times 10^{-4}$。
- $A = 0.3A_0 \Rightarrow e^{-kt} = 0.3 \Rightarrow t = \ln(1/0.3)/k$。
- $t = 5730 \cdot \ln(10/3)/\ln 2 \approx 9{,}953$ 年。
- （グラフ：t は千年単位、y = 残存率(%) ÷ 10。）

> 答: $k = \ln 2 / 5730 \approx 1.21 \times 10^{-4}$ /年 / $t = \ln(1/0.3)/k \approx 9{,}950$ 年

20. 点滴による投薬

- $y' + 0.25y = 2 \Rightarrow y = 8 + Ce^{-t/4}$；$y(0) = 0 \Rightarrow C = -8$。
- $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to 8$ mg。
- $0.9 \cdot 8 \Rightarrow e^{-t/4} = 0.1 \Rightarrow t = 4 \ln 10 \approx 9.21$ h。
- 点滴速度を 2 倍にすると量は 2 倍になるが、90% に達するまでの時間は変わらない。

> 答: $y = 8(1 - e^{-t/4}) \to 8$ mg に近づく / 90% に達するのは $t = 4 \ln 10 \approx 9.2$ h

21. 死亡推定時刻

- 発見時を $t = 0$ として $T - 20 = 10e^{-kt}$。
- $28 - 20 = 10e^{-k} \Rightarrow k = \ln(10/8) \approx 0.2231$ /h。
- 死亡時は $T = 37$：$17 = 10e^{-kt} \Rightarrow t = -\ln 1.7 / k \approx -2.38$。
- 死亡は発見の ≈ 2.38 h ≈ 2 時間 23 分前。
- （グラフ：温度は 10 °C 単位、死亡時刻から開始。）

> 答: $k = \ln(10/8) \approx 0.223$ /h / 死亡は発見の $\approx \ln 1.7 / k \approx 2.38$ h（2時間23分）前

非線形モデル

22. うわさの広がり

- ロジスティック：$x = 1000/(1 + Ce^{-1000kt})$, $x(0) = 10 \Rightarrow C = 99$。
- $x(2) = 100 \Rightarrow 1 + 99e^{-2000k} = 10 \Rightarrow 1000k = \ln 11 / 2 \approx 1.199$。
- $x = 500 \Rightarrow 99e^{-1000kt} = 1 \Rightarrow t = \ln 99 / (1000k) = 2 \ln 99 / \ln 11 \approx 3.83$ 日。
- （グラフ：x は百人単位。）

> 答: $x = 1000/(1 + 99e^{-1000kt})$, $1000k = (\ln 11)/2$ / $t = 2 \ln 99 / \ln 11 \approx 3.83$ 日で半数

23. 腫瘍の成長（ゴンペルツ）

- $z = \ln y$ とおくと $z' = y'/y = 0.5(\ln 8 - z)$, $z(0) = 0$。
- $z = \ln 8\,(1 - e^{-t/2}) \Rightarrow y = 8^{1 - e^{\wedge\{-t/2\}}} \to 8$。
- $y = 4 \Rightarrow 1 - e^{-t/2} = 2/3 \Rightarrow t = 2 \ln 3 \approx 2.20$。

> 答: $\ln y = \ln 8\,(1 - e^{-t/2}) \to y \to 8$ / $y = 4$ となるのは $t = 2 \ln 3 \approx 2.20$

24. 円錐タンクの排水

- 変数分離：$h^{3/2}\,dh = -3\,dt \Rightarrow (2/5)h^{5/2} = -3t + C$。
- $h(0) = 4 \Rightarrow C = (2/5) \cdot 32 \Rightarrow h^{5/2} = 32 - 7.5t$。
- 空になるとき $h = 0 \Rightarrow t = 32/7.5 \approx 4.27$ 分。
- 底に近い（円錐の細い部分）ほど水位は速く下がる。

> 答: $h^{3/2}\,dh = -3\,dt \to h^{5/2} = 32 - 7.5t$ / $t = 32/7.5 \approx 4.27$ 分で空になる

連立微分方程式

25. つながった2つのタンク

- $x' = -(3/10)x + (1/10)y$, $y' = (3/10)x - (3/10)y$。
- 固有値：$(\lambda + 0.3)^2 = 0.03 \Rightarrow \lambda = -0.3 \pm 0.1732$：ともに負 $\Rightarrow (x, y) \to (0, 0)$。
- B が最大となるのは $y' = 0 \Rightarrow y = x$ のとき（相曲線上）。
- 数値計算より：$t \approx 3.8$ 分で $y_{max} \approx 1.96$ kg。

> 答: 固有値 $-0.3 \pm 0.1\sqrt{3}$ はともに負 → 塩は流れ去る / $y = x$ で B 最大：$t \approx 3.8$ 分で ≈ 1.96 kg

26. 感染症（SIR モデル）

- $dI/dS = (0.5SI - I)/(-0.5SI) = -1 + 2/S \Rightarrow I = -S + 2 \ln S + C$。
- $C = 10 - 2 \ln 9.9 \Rightarrow I = 10 - S + 2 \ln(S/9.9)$。
- I は $S = 2$ で最大：$I_{max} = 8 + 2 \ln(2/9.9) \approx 4.80$ 千人。
- 流行は $I = 0$ で終息：$10 - S + 2 \ln(S/9.9) = 0 \Rightarrow S\infty \approx 0.069$ 千人 ≈ 69 人。

> 答: $dI/dS = -1 + 2/S$：$S = 2$ で $I_{max} \approx 4.80$（千人） / 感染しない人：$S\infty \approx 0.069$（≈ 69 人）

27. ランチェスターの戦闘モデル

- $dx/dy = 2y/x \Rightarrow x\,dx = 2y\,dy \Rightarrow x^2 - 2y^2 = C$（ランチェスターの二乗法則）。
- $C = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ 先に Y が 0 になる。
- $y = 0$ のとき $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 千人が生き残る。
- 数値計算では $t \approx 1.25$ で戦闘終了。（Y が勝つには戦闘力が 2.25 を超える必要がある。）

> 答: $dy/dx = x/(2y) \rightarrow x^2 - 2y^2 = 4$（二乗法則） / X 軍が 2 千人を残して勝利（$t \approx 1.25$）