拉普拉斯轉換應用題

SnackLab 練習題 • 拉普拉斯轉換 • 12 題應用題與詳解 • snacklab.dev

這是 SnackLab 自製的練習題，從轉換與反轉換、平移定理、摺積與週期函數到狄拉克 δ 函數依主題編排，所有答案都經過符號驗算。每一題都在 SnackLab 短影片中用圖形解說，也可以用 SnackLab App 的 L 模式（上方 f(t)、下方 F(s)）自己確認。

轉換與反轉換

1. 電容器充電　充電中電容器兩端電壓的拉普拉斯轉換為 $V(s) = 10/(s(s + 2))$。求 $v(t)$、最終電壓，以及 $v = 4$ V 的時間。

2. 血液中的藥物　血液中藥物濃度的拉普拉斯轉換為 $C(s) = (3s + 7)/((s + 1)(s + 3))$。求 $C(t)$ 及 $t = 1$ 時的值。

3. 避震器　汽車壓過減速丘後，車身位移的拉普拉斯轉換為 $X(s) = (s + 4)/(s^2 + 4s + 13)$。求 $x(t)$ 以及 $t > 0$ 時第一次 $x = 0$ 的時間。

平移定理

4. 晚開的暖氣　$t = 2$ 時打開暖氣，房間溫度上升的拉普拉斯轉換為 $T(s) = 3e^{-2s}/(s(s+1))$。求 $T(t)$ 及 $t = 4$ 時的溫度上升。

5. 推兩秒　從 $t = 1$ 秒到 $t = 3$ 秒，對推車施加 4 N 的定力。用單位步階函數表示此力，並求拉普拉斯轉換 $F(s)$ 與總衝量。

6. 逐漸消失的振動　被敲擊的金屬棒振動以 $f(t) = e^{-t}\sin 2t$ 表示。求 $F(s)$，並用它求 $t \geq 0$ 時 $f(t)$ 下方的面積。

摺積與週期函數

7. 越來越大的共振　以固有頻率搖動的彈簧，其位移的拉普拉斯轉換為 $X(s) = 4s/(s^2 + 4)^2$。求 $x(t)$ 以及 $t = 5$ 附近的振動大小。

8. 流入量會變的水槽　空水槽以 $1 + \sin t$ 的速率注水，並以等於水量 y 的速率流出：$y' + y = 1 + \sin t$，$y(0) = 0$。用摺積表示 y，求 $y(t)$ 及長時間後的行為。

9. 方波電壓　開關先加 3 V 一秒，再加 0 V 一秒，如此不斷重複（週期 2）。求拉普拉斯轉換 $E(s)$ 與平均電壓。

狄拉克 δ 函數

10. 用鐵鎚敲彈簧　靜止在彈簧上的物體於 $t = 1$ 被鐵鎚敲擊：$y'' + 9y = 2\delta(t-1)$，$y(0) = y'(0) = 0$。求 $y(t)$ 與運動的振幅。

11. 第二次注射　體內藥量從 2 開始，以等於藥量的速率減少。$t = 2$ 時瞬間注射 4：$y' + y = 4\delta(t-2)$，$y(0) = 2$。求 $y(t)$ 及注射後瞬間的藥量。

12. 踢一下阻尼彈簧　靜止的阻尼彈簧在 $t = 1$ 被用力踢一下：$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-1)$，$y(0) = y'(0) = 0$。求 $y(t)$ 與最大位移。

詳解

轉換與反轉換

1. 電容器充電

- 部分分式：$10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2)$。
- $v(t) = 5 - 5e^{-2t} = 5(1 - e^{-2t})$；$t \to \infty$ 時 $v \to 5$ V。
- $5(1 - e^{-2t}) = 4 \to e^{-2t} = 1/5 \to t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$。
- 一般而言 $10/(s(s+a))$ 的最終值為 $10/a$（影片中的滑桿）。

> 答: $10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2) \to v = 5(1 - e^{-2t})$ / $t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$ 時 $v = 4$，最終值 5 V

2. 血液中的藥物

- 設 $(3s+7)/((s+1)(s+3)) = A/(s+1) + B/(s+3)$。
- 遮蓋法：$A = (-3+7)/(-1+3) = 2$，$B = (-9+7)/(-3+1) = 1$。
- $C(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}$。
- $C(1) = 2/e + e^{-3} \approx 0.786$。

> 答: $A/(s+1) + B/(s+3)$：$A = 2, B = 1$ / $C = 2e^{-t} + e^{-3t}$, $C(1) \approx 0.79$

3. 避震器

- $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9$，$s + 4 = (s+2) + 2$。
- $X(s) = (s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3) \cdot 3/((s+2)^2 + 9)$。
- 第一平移定理：$x(t) = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3) \sin 3t)$。
- 當 $\tan 3t = -3/2$ 時 $x = 0 \to 3t = \pi - \arctan 1.5 \to t \approx 0.72$。

> 答: $(s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3) \cdot 3/((s+2)^2 + 9)$ / $x = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3) \sin 3t)$，第一個零點 $t \approx 0.72$

平移定理

4. 晚開的暖氣

- 若沒有延遲：$3/(s(s+1)) = 3/s - 3/(s+1) \to 3(1 - e^{-t})$。
- 第二平移定理：$e^{-2s}F(s) \leftrightarrow u(t-2)f(t-2)$。
- $T(t) = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$；$t = 2$ 之前 $T = 0$。
- $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$。

> 答: $e^{-2s} \to$ 平移 2：$T = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$ / $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$

5. 推兩秒

- $f(t) = 4[u(t-1) - u(t-3)]$。
- $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}/s \to F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$。
- 衝量 = $t \geq 0$ 上的 $\int f\,dt = F(0)$。
- $\lim_{s \to 0} 4(e^{-s} - e^{-3s})/s = 4 \cdot (3-1) = 8$ N・s。

> 答: $F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$ / 衝量 = 面積 = $F(0) = \lim_{s \to 0} F(s) = 8$

6. 逐漸消失的振動

- $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$。
- 第一平移定理：$\mathcal{L}\{e^{-t}g(t)\} = G(s+1) \to F(s) = 2/((s+1)^2 + 4)$。
- 面積 = $t \geq 0$ 上的 $\int e^{-t} \sin 2t\,dt = F(0) = 2/5$。

> 答: s 軸平移：$2/(s^2 + 4) \to 2/((s+1)^2 + 4)$ / 面積 = $t \geq 0$ 上的 $\int f\,dt = F(0) = 2/5$

摺積與週期函數

7. 越來越大的共振

- 乘以 t：$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -F'(s)$。
- 當 $f = \sin 2t$：$-d/ds[2/(s^2 + 4)] = 4s/(s^2 + 4)^2$。
- 因此 $x(t) = t \sin 2t$：包絡線 $\pm t$ 無限增大（共振）。
- $t = 5$ 附近振幅約為 5。

> 答: $\mathcal{L}\{t \sin 2t\} = -d/ds[2/(s^2 + 4)] = 4s/(s^2 + 4)^2$ / $x = t \sin 2t \to t = 5$ 時振幅 5

8. 流入量會變的水槽

- 轉換：$(s+1)Y = 1/s + 1/(s^2 + 1) \to Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2 + 1))$。
- 摺積定理：$y = e^{-t} * (1 + \sin t) =$ 從 0 到 t 的 $\int e^{-(t-\tau)}(1 + \sin \tau)\,d\tau$。
- $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2$。
- 長時間後 y 在 $1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29$ 與 $1 + \sqrt{2}/2 \approx 1.71$ 之間擺動。

> 答: $Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2 + 1))$ / $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2 \to$ 在 1 ± 0.71 間擺動

9. 方波電壓

- 週期函數：$E(s) = (1/(1 - e^{-2s})) \times$（一個週期內的 $\int e^{-st}E(t)\,dt$）。
- 一個週期：從 0 到 1 的 $\int 3e^{-st}\,dt = 3(1 - e^{-s})/s$。
- $E(s) = 3(1 - e^{-s})/(s(1 - e^{-2s})) = 3/(s(1 + e^{-s}))$。
- 平均 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$ V。

> 答: $E(s) = 3(1 - e^{-s})/(s(1 - e^{-2s})) = 3/(s(1 + e^{-s}))$ / 平均 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$

狄拉克 δ 函數

10. 用鐵鎚敲彈簧

- $L\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$：$(s^2+9)Y = 2e^{-s}$。
- $Y = 2e^{-s}/(s^2+9) = (2/3)e^{-s} \cdot 3/(s^2+9)$。
- $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$：$t = 1$ 之前靜止，之後振動。
- 振幅 2/3。

> 答: $Y = 2e^{-s}/(s^2+9)$ / $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$，振幅 2/3

11. 第二次注射

- $sY - 2 + Y = 4e^{-2s} \to Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$。
- $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$。
- $t = 2$ 前瞬間：$2e^{-2} \approx 0.27$，脈衝使它跳升 4。
- 注射後瞬間：$4 + 2e^{-2} \approx 4.27$。

> 答: $Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$ / $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$，注射後 ≈ 4.27

12. 踢一下阻尼彈簧

- $(s^2+2s+5)Y = e^{-s} \to Y = e^{-s}/((s+1)^2+4)$。
- $y = \frac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$。
- 令 $\tau = t-1$：$d/d\tau[e^{-\tau}\sin 2\tau] = 0 \to \tan 2\tau = 2 \to \tau \approx 0.554$。
- 最大位移 $y \approx 0.257$（$t \approx 1.55$）。

> 答: $y = \frac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$ / 在 $t = 1 + (\arctan 2)/2 \approx 1.55$ 最大，$y \approx 0.257$