라플라스 변환 활용 문제

SnackLab 연습문제 · 라플라스 변환 · 활용 문제 12개와 풀이 · snacklab.dev

SnackLab이 직접 만든 연습문제입니다. 변환과 역변환, 이동 정리, 합성곱과 주기함수, 디랙 델타 함수까지 주제별로 구성했고, 모든 답은 기호 계산으로 검산했습니다. 각 문제는 SnackLab 숏츠에서 그래프로 풀이하며, SnackLab 앱의 L 모드(위 칸 f(t), 아래 칸 F(s))로 직접 확인할 수 있습니다.

변환과 역변환

1. 축전기 충전. 충전 중인 축전기 양단의 전압의 라플라스 변환이 $V(s) = 10/(s(s + 2))$이다. $v(t)$, 최종 전압, $v = 4$ V가 되는 시각을 구하여라.

2. 혈액 속 약물. 혈액 속 약물 농도의 라플라스 변환이 $C(s) = (3s + 7)/((s + 1)(s + 3))$이다. $C(t)$와 $t = 1$일 때의 값을 구하여라.

3. 쇼크업소버. 자동차가 턱을 넘은 뒤 차체 변위의 라플라스 변환이 $X(s) = (s + 4)/(s^2 + 4s + 13)$이다. $x(t)$와, $t > 0$에서 처음으로 $x = 0$이 되는 시각을 구하여라.

이동 정리

4. 늦게 켠 히터. t = 2에 히터를 켰고, 방의 온도 상승의 라플라스 변환이 $T(s) = 3e^{-2s}/(s(s+1))$이다. T(t)와 t = 4일 때의 온도 상승을 구하여라.

5. 2초 동안 밀기. t = 1초부터 t = 3초까지 수레에 일정한 힘 4 N이 작용한다. 이 힘을 단위계단함수로 나타내고, 라플라스 변환 F(s)와 전체 충격량을 구하여라.

6. 잦아드는 진동. 때린 금속 막대의 진동을 $f(t) = e^{-t}\sin 2t$로 나타낸다. F(s)를 구하고, 이를 이용해 $t \geq 0$에서 f(t) 아래의 넓이를 구하여라.

합성곱과 주기함수

7. 커지는 공진. 고유진동수로 흔들리는 스프링의 변위의 라플라스 변환이 $X(s) = 4s/(s^2 + 4)^2$이다. $x(t)$와 $t = 5$ 부근의 진동 크기를 구하여라.

8. 유입량이 변하는 탱크. 빈 탱크에 물이 $1 + \sin t$의 속도로 들어오고, 남아 있는 양 y와 같은 속도로 빠져나간다: $y' + y = 1 + \sin t$, $y(0) = 0$. y를 합성곱으로 나타내고 $y(t)$와 오랜 시간 뒤의 모습을 구하여라.

9. 사각파 전압. 스위치가 1초 동안 3 V를 걸고 다음 1초 동안 0 V를 거는 일을 계속 반복한다 (주기 2). 라플라스 변환 $E(s)$와 평균 전압을 구하여라.

디랙 델타 함수

10. 망치로 스프링 치기. 정지해 있던 스프링 위의 물체를 $t = 1$에 망치로 친다: $y'' + 9y = 2\delta(t - 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$. $y(t)$와 운동의 진폭을 구하여라.

11. 두 번째 주사. 몸속 약물의 양은 2에서 시작해 양과 같은 속도로 줄어든다. $t = 2$에 4만큼을 순간적으로 주사한다: $y' + y = 4\delta(t - 2)$, $y(0) = 2$. $y(t)$와 주사 직후의 양을 구하여라.

12. 감쇠 스프링 차기. 정지한 감쇠 스프링을 $t = 1$에 세게 한 번 찬다: $y'' + 2y' + 5y = \delta(t - 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$. $y(t)$와 최대 변위를 구하여라.

풀이

변환과 역변환

1. 축전기 충전

- 부분분수: $10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2)$.
- $v(t) = 5 - 5e^{-2t} = 5(1 - e^{-2t})$; $t \to \infty$이면 $v \to 5$ V.
- $5(1 - e^{-2t}) = 4 \to e^{-2t} = 1/5 \to t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$.
- 일반적으로 $10/(s(s+a))$의 최종값은 $10/a$이다 (영상 속 슬라이더).

> 답: $10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2)$ → $v = 5(1 - e^{-2t})$ / $t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$에서 $v = 4$, 최종값 5 V

2. 혈액 속 약물

- $(3s+7)/((s+1)(s+3)) = A/(s+1) + B/(s+3)$으로 놓는다.
- 가리기법: $A = (-3+7)/(-1+3) = 2$, $B = (-9+7)/(-3+1) = 1$.
- $C(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}$.
- $C(1) = 2/e + e^{-3} \approx 0.786$.

> 답: $A/(s+1) + B/(s+3)$: $A = 2$, $B = 1$ / $C = 2e^{-t} + e^{-3t}$, $C(1) \approx 0.79$

3. 쇼크업소버

- $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9$, $s + 4 = (s+2) + 2$.
- $X(s) = (s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3)\cdot 3/((s+2)^2 + 9)$.
- 제1 이동 정리: $x(t) = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3)\sin 3t)$.
- $\tan 3t = -3/2$일 때 $x = 0 \to 3t = \pi - \arctan 1.5 \to t \approx 0.72$.

> 답: $(s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3)\cdot 3/((s+2)^2 + 9)$ / $x = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3)\sin 3t)$, 처음 0: $t \approx 0.72$

이동 정리

4. 늦게 켠 히터

- 지연이 없으면: $3/(s(s+1)) = 3/s - 3/(s+1) \to 3(1 - e^{-t})$.
- 제2 이동 정리: $e^{-2s}F(s) \leftrightarrow u(t-2)f(t-2)$.
- $T(t) = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$; $t = 2$까지는 $T = 0$.
- $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$.

> 답: $e^{-2s} \to$ 2만큼 이동: $T = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$ / $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$

5. 2초 동안 밀기

- $f(t) = 4[u(t-1) - u(t-3)]$.
- $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}/s \to F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$.
- 충격량 = $t \geq 0$에서 $\int f\,dt = F(0)$.
- $\lim_{s \to 0} 4(e^{-s} - e^{-3s})/s = 4 \cdot (3-1) = 8$ N·s.

> 답: $F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$ / 충격량 = 넓이 = $F(0) = \lim_{s \to 0} F(s) = 8$

6. 잦아드는 진동

- $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$.
- 제1 이동 정리: $\mathcal{L}\{e^{-t}g(t)\} = G(s+1) \to F(s) = 2/((s+1)^2 + 4)$.
- 넓이 = $t \geq 0$에서 $\int e^{-t} \sin 2t\,dt = F(0) = 2/5$.

> 답: s축 이동: $2/(s^2+4) \to 2/((s+1)^2+4)$ / 넓이 = $t \geq 0$에서 $\int f\,dt = F(0) = 2/5$

합성곱과 주기함수

7. 커지는 공진

- t를 곱하면: $\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -F'(s)$.
- $f = \sin 2t$일 때: $-\frac{d}{ds}[2/(s^2+4)] = 4s/(s^2+4)^2$.
- 따라서 $x(t) = t \sin 2t$: 포락선 $\pm t$가 끝없이 커진다 (공진).
- $t = 5$ 부근에서 진폭은 약 5이다.

> 답: $\mathcal{L}\{t \sin 2t\} = -\frac{d}{ds}[2/(s^2+4)] = 4s/(s^2+4)^2$ / $x = t \sin 2t \to t = 5$에서 진폭 5

8. 유입량이 변하는 탱크

- 변환: $(s+1)Y = 1/s + 1/(s^2+1) \to Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2+1))$.
- 합성곱 정리: $y = e^{-t} * (1 + \sin t) = 0$부터 t까지 $\int e^{-(t-\tau)}(1 + \sin\tau)\,d\tau$.
- $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2$.
- 시간이 지나면 y는 $1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29$와 $1 + \sqrt{2}/2 \approx 1.71$ 사이에서 출렁인다.

> 답: $Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2+1))$ / $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2 \to 1 \pm 0.71$로 출렁

9. 사각파 전압

- 주기함수: $E(s) = (1/(1 - e^{-2s})) \times$ (한 주기 동안 $\int e^{-st}E(t)\,dt$).
- 한 주기: 0부터 1까지 $\int 3e^{-st}\,dt = 3(1 - e^{-s})/s$.
- $E(s) = 3(1-e^{-s})/(s(1-e^{-2s})) = 3/(s(1+e^{-s}))$.
- 평균 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$ V.

> 답: $E(s) = 3(1-e^{-s})/(s(1-e^{-2s})) = 3/(s(1+e^{-s}))$ / 평균 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$

디랙 델타 함수

10. 망치로 스프링 치기

- $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$: $(s^2+9)Y = 2e^{-s}$.
- $Y = 2e^{-s}/(s^2+9) = (2/3)e^{-s}\cdot 3/(s^2+9)$.
- $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$: $t = 1$까지 정지, 그 뒤 진동.
- 진폭 2/3.

> 답: $Y = 2e^{-s}/(s^2+9)$ / $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$, 진폭 2/3

11. 두 번째 주사

- $sY - 2 + Y = 4e^{-2s} \to Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$.
- $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$.
- $t = 2$ 직전: $2e^{-2} \approx 0.27$, 충격이 4만큼 뛰게 한다.
- 직후: $4 + 2e^{-2} \approx 4.27$.

> 답: $Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$ / $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$, 직후 ≈ 4.27

12. 감쇠 스프링 차기

- $(s^2+2s+5)Y = e^{-s} \to Y = e^{-s}/((s+1)^2+4)$.
- $y = \tfrac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$.
- $\tau = t-1$로 놓으면 $d/d\tau[e^{-\tau}\sin 2\tau] = 0 \to \tan 2\tau = 2 \to \tau \approx 0.554$.
- 최대 변위 $y \approx 0.257$ ($t \approx 1.55$).

> 답: $y = \tfrac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$ / $t = 1 + (\arctan 2)/2 \approx 1.55$에서 최대 $y \approx 0.257$