ラプラス変換の応用問題

SnackLab 演習問題・ラプラス変換・応用問題 12 問と解答・snacklab.dev

SnackLab オリジナルの演習問題です。変換と逆変換、移動定理、畳み込みと周期関数、ディラックのデルタ関数までテーマ別に並べ、すべての答えは記号計算で検算しました。各問題は SnackLab のショート動画でグラフを使って解説しており、SnackLab アプリの L モード（上に f(t)、下に F(s)）で確かめられます。

変換と逆変換

1. コンデンサの充電　充電中のコンデンサの電圧のラプラス変換が $V(s) = 10/(s(s+2))$ である。v(t)、最終電圧、v = 4 V となる時刻を求めよ。

2. 血液中の薬　血液中の薬の濃度のラプラス変換が $C(s) = (3s+7)/((s+1)(s+3))$ である。C(t) と t = 1 での値を求めよ。

3. ショックアブソーバー　車が段差を越えた後、車体の変位のラプラス変換が $X(s) = (s+4)/(s^2+4s+13)$ である。x(t) と、t > 0 で初めて x = 0 となる時刻を求めよ。

移動定理

4. 遅れて入れたヒーター　$t = 2$ でヒーターを入れ、部屋の温度上昇のラプラス変換が $T(s) = 3e^{-2s}/(s(s+1))$ である。$T(t)$ と $t = 4$ での温度上昇を求めよ。

5. 2 秒間押す　$t = 1$ 秒から $t = 3$ 秒まで台車に一定の力 $4\ \mathrm{N}$ が働く。この力を単位階段関数で表し、ラプラス変換 $F(s)$ と力積の合計を求めよ。

6. 減衰する振動　たたいた金属棒の振動を $f(t) = e^{-t}\sin 2t$ で表す。$F(s)$ を求め、それを使って $t \geq 0$ での $f(t)$ の下の面積を求めよ。

畳み込みと周期関数

7. 大きくなる共振　固有振動数で揺らされるばねの変位のラプラス変換が $X(s) = 4s/(s^2 + 4)^2$ である。$x(t)$ と $t = 5$ 付近の振動の大きさを求めよ。

8. 流入量が変わるタンク　空のタンクに水が $1 + \sin t$ の速さで流れ込み、残っている量 y と同じ速さで流れ出る：$y' + y = 1 + \sin t$, $y(0) = 0$。y を畳み込みで表し、$y(t)$ と長時間後の様子を求めよ。

9. 方形波の電圧　スイッチが 1 秒間 3 V をかけ、次の 1 秒間 0 V にすることを繰り返す（周期 2）。ラプラス変換 $E(s)$ と平均電圧を求めよ。

ディラックのデルタ関数

10. ハンマーでばねをたたく　静止しているばねの物体を $t = 1$ にハンマーでたたく：$y'' + 9y = 2\delta(t - 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$。$y(t)$ と運動の振幅を求めよ。

11. 2 回目の注射　体内の薬の量は 2 から始まり、量と同じ速さで減る。$t = 2$ に 4 を瞬間的に注射する：$y' + y = 4\delta(t - 2)$, $y(0) = 2$。$y(t)$ と注射直後の量を求めよ。

12. 減衰ばねをける　静止した減衰ばねを $t = 1$ に強く 1 回ける：$y'' + 2y' + 5y = \delta(t - 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$。$y(t)$ と最大変位を求めよ。

解答

変換と逆変換

1. コンデンサの充電

- 部分分数：$10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2)$。
- $v(t) = 5 - 5e^{-2t} = 5(1 - e^{-2t})$；$t \to \infty$ で $v \to 5$ V。
- $5(1 - e^{-2t}) = 4 \to e^{-2t} = 1/5 \to t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$。
- 一般に $10/(s(s+a))$ の最終値は $10/a$（動画のスライダー）。

> 答: $10/(s(s+2)) = 5/s - 5/(s+2) \to v = 5(1 - e^{-2t})$ / $t = (\ln 5)/2 \approx 0.80$ で $v = 4$、最終値 5 V

2. 血液中の薬

- $(3s+7)/((s+1)(s+3)) = A/(s+1) + B/(s+3)$ とおく。
- 隠蔽法：$A = (-3+7)/(-1+3) = 2$、$B = (-9+7)/(-3+1) = 1$。
- $C(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}$。
- $C(1) = 2/e + e^{-3} \approx 0.786$。

> 答: $A/(s+1) + B/(s+3)$：$A = 2, B = 1$ / $C = 2e^{-t} + e^{-3t}$, $C(1) \approx 0.79$

3. ショックアブソーバー

- $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9$、$s + 4 = (s+2) + 2$。
- $X(s) = (s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3) \cdot 3/((s+2)^2 + 9)$。
- 第 1 移動定理：$x(t) = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3) \sin 3t)$。
- $\tan 3t = -3/2$ のとき $x = 0 \to 3t = \pi - \arctan 1.5 \to t \approx 0.72$。

> 答: $(s+2)/((s+2)^2 + 9) + (2/3) \cdot 3/((s+2)^2 + 9)$ / $x = e^{-2t}(\cos 3t + (2/3) \sin 3t)$、最初の 0：$t \approx 0.72$

移動定理

4. 遅れて入れたヒーター

- 遅れがなければ：$3/(s(s+1)) = 3/s - 3/(s+1) \to 3(1 - e^{-t})$。
- 第 2 移動定理：$e^{-2s}F(s) \leftrightarrow u(t-2)f(t-2)$。
- $T(t) = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$；$t = 2$ までは $T = 0$。
- $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$。

> 答: $e^{-2s} \to 2$ だけ移動：$T = 3u(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$ / $T(4) = 3(1 - e^{-2}) \approx 2.59$

5. 2 秒間押す

- $f(t) = 4[u(t-1) - u(t-3)]$。
- $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}/s \to F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$。
- 力積 = $t \geq 0$ での $\int f\,dt = F(0)$。
- $\lim_{s \to 0} 4(e^{-s} - e^{-3s})/s = 4 \cdot (3-1) = 8$ N·s。

> 答: $F(s) = 4(e^{-s} - e^{-3s})/s$ / 力積 = 面積 = $F(0) = \lim_{s \to 0} F(s) = 8$

6. 減衰する振動

- $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2 + 4)$。
- 第 1 移動定理：$\mathcal{L}\{e^{-t}g(t)\} = G(s+1) \to F(s) = 2/((s+1)^2 + 4)$。
- 面積 = $t \geq 0$ での $\int e^{-t} \sin 2t\,dt = F(0) = 2/5$。

> 答: s 軸の移動：$2/(s^2+4) \to 2/((s+1)^2+4)$ / 面積 = $t \geq 0$ での $\int f\,dt = F(0) = 2/5$

畳み込みと周期関数

7. 大きくなる共振

- t を掛けると：$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -F'(s)$。
- $f = \sin 2t$ のとき：$-d/ds[2/(s^2+4)] = 4s/(s^2+4)^2$。
- よって $x(t) = t \sin 2t$：包絡線 $\pm t$ が限りなく大きくなる（共振）。
- $t = 5$ 付近で振幅は約 5。

> 答: $\mathcal{L}\{t \sin 2t\} = -d/ds[2/(s^2+4)] = 4s/(s^2+4)^2$ / $x = t \sin 2t \to t = 5$ で振幅 5

8. 流入量が変わるタンク

- 変換：$(s+1)Y = 1/s + 1/(s^2+1) \to Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2+1))$。
- 畳み込み定理：$y = e^{-t} * (1 + \sin t) = 0$ から t までの $\int e^{-(t-\tau)}(1 + \sin \tau)\,d\tau$。
- $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2$。
- 時間がたつと y は $1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29$ と $1 + \sqrt{2}/2 \approx 1.71$ の間で振動する。

> 答: $Y = (1/(s+1)) \cdot (1/s + 1/(s^2+1))$ / $y = 1 + (\sin t - \cos t)/2 - e^{-t}/2 \to 1 \pm 0.71$ で振動

9. 方形波の電圧

- 周期関数：$E(s) = (1/(1 - e^{-2s})) \times$（1 周期の $\int e^{-st}E(t)\,dt$）。
- 1 周期：0 から 1 までの $\int 3e^{-st}\,dt = 3(1 - e^{-s})/s$。
- $E(s) = 3(1 - e^{-s})/(s(1 - e^{-2s})) = 3/(s(1 + e^{-s}))$。
- 平均 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$ V。

> 答: $E(s) = 3(1 - e^{-s})/(s(1 - e^{-2s})) = 3/(s(1 + e^{-s}))$ / 平均 = $\lim_{s \to 0} sE(s) = 3/2$

ディラックのデルタ関数

10. ハンマーでばねをたたく

- $L\{\delta(t-1)\} = e^{-s}$：$(s^2+9)Y = 2e^{-s}$。
- $Y = 2e^{-s}/(s^2+9) = (2/3)e^{-s}\cdot 3/(s^2+9)$。
- $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$：$t = 1$ までは静止、その後振動。
- 振幅 2/3。

> 答: $Y = 2e^{-s}/(s^2+9)$ / $y = (2/3)u(t-1)\sin 3(t-1)$、振幅 2/3

11. 2 回目の注射

- $sY - 2 + Y = 4e^{-2s} \to Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$。
- $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$。
- $t = 2$ の直前：$2e^{-2} \approx 0.27$、衝撃で 4 だけ跳ね上がる。
- 直後：$4 + 2e^{-2} \approx 4.27$。

> 答: $Y = 2/(s+1) + 4e^{-2s}/(s+1)$ / $y = 2e^{-t} + 4u(t-2)e^{-(t-2)}$、直後 ≈ 4.27

12. 減衰ばねをける

- $(s^2+2s+5)Y = e^{-s} \to Y = e^{-s}/((s+1)^2+4)$。
- $y = \tfrac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$。
- $\tau = t-1$ とおくと $d/d\tau[e^{-\tau}\sin 2\tau] = 0 \to \tan 2\tau = 2 \to \tau \approx 0.554$。
- 最大変位 $y \approx 0.257$（$t \approx 1.55$）。

> 答: $y = \tfrac{1}{2}u(t-1)e^{-(t-1)}\sin 2(t-1)$ / $t = 1 + (\arctan 2)/2 \approx 1.55$ で最大 $y \approx 0.257$