5지선다형

1. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$$

을 만족시킬 때, $f(2) + f'(2)$의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6 = 3S_3 + 9$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-2)f(x) = x^3 - 3x + a$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x) = 6x^2 + 2x$에 대하여

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx - \int_{1}^{3} f(x)\,dx$$

의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $\sin(\pi+\theta) = \frac{3}{5}$이고 $\cos(\pi+\theta) > 0$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{12}{25}$ ② $-\frac{7}{25}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{12}{25}$

7. 함수

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x$$

가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

8. 두 실수 a, b가

$$9^a = 4, \quad 3^b = \frac{81}{8}$$

을 만족시킬 때, $3a + b$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

9. 시각 $t = 0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 6t^2 - 6t, \quad v_2(t) = 6t + 18$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아질 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

10. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이고

$$\overline{BC} = 4\sqrt{2}, \quad \overline{AB} = 2$$

일 때, 선분 AC의 길이는? [4점]

① 4 ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{20}{3}$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x+2)f(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt + 2x^3 + ax^2 + bx$$

를 만족시킬 때, $f(2) - f(0)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

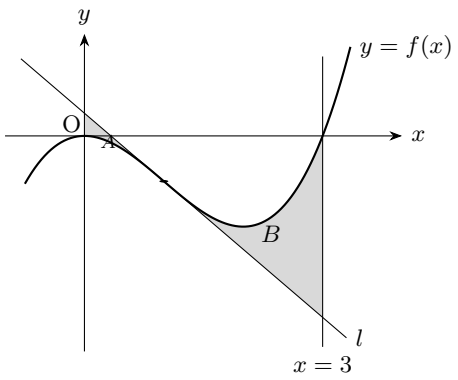
12. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 n에 대하여 a_n은 정수이고, $a_2 \times a_6 = -20$이다.

가능한 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값은? [4점]

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

13. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y = f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y = f(x)$와 직선 l 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $A - B$의 값은? [4점]

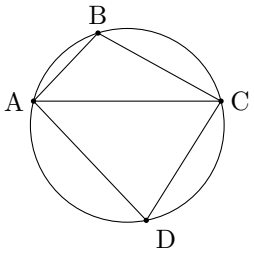


① $-\frac{17}{4}$ ② -4 ③ $-\frac{15}{4}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{13}{4}$

14. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서

$$\overline{AB} = 2, \quad \overline{BC} = \overline{CD} = 3, \quad \overline{AC} = 4$$

일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{31\sqrt{15}}{16}$ ② $\frac{33\sqrt{15}}{16}$ ③ $\frac{35\sqrt{15}}{16}$ ④ $\frac{37\sqrt{15}}{16}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{15}}{16}$

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt + \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x) = 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 집합은 $\{x \mid -2 \le x \le 0\}$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x = k$에서 미분가능하지 않은 실수 k는 오직 하나이고, 그 값은 음수이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

단답형

16. 부등식

$$\log_2(x-2) + \log_2(12-x) \ge 4$$

를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x) = 3x^2 + kx$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 16$$

일 때, $\int_0^3 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

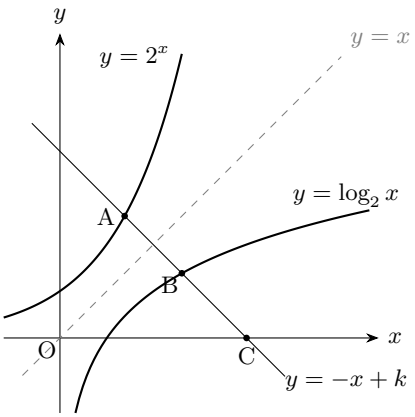
18. $\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{CA}} = \sqrt{41}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

19. 닫힌구간 $[-1, 4]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$가

$$-k \le f(x) \le k$$

를 만족시키도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

20. 실수 k에 대하여 직선 $y = -x + k$가 두 곡선 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$를 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]



21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f'(x)}$의 값이 존재한다.
(나) $f(0) = 16, \quad f(2) = 0$

$f(1)$의 값이 될 수 있는 모든 정수의 합을 구하시오. [4점]

22. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \geq 0) \\ a_n + k & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} = 0$이고, $a_n = 0$을 만족시키는 15 이하의 자연수 n의 개수가 2가 되도록 하는 모든 k의 값 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

5지선다형

23. 같은 종류의 사탕 7개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [2점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

24. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수 f가

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \geq 6$$

을 만족시킬 확률은? [3점]

① $\frac{70}{81}$ ② $\frac{73}{81}$ ③ $\frac{76}{81}$ ④ $\frac{79}{81}$ ⑤ $\frac{80}{81}$

25. 7개의 문자 a, a, a, b, b, c, c를 모두 일렬로 나열할 때, 문자 a끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

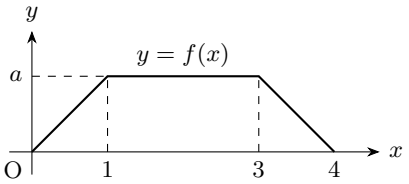
26. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{P}(X \geq 2) = \frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{11}{6}$ ④ 2 ⑤ $\frac{13}{6}$

27. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$이고, X의 확률밀도함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 2\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{13}{24}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

28. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 두 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 개의 동전을 동시에 던져
> 앞면이 2개 나오면 점 P를 양의 방향으로 2만큼,
> 앞면이 1개 나오면 점 P를 양의 방향으로 1만큼,
> 앞면이 나오지 않으면 점 P를 음의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 2일 때, 2번째 시행을 마친 후 점 P의 좌표가 0이었을 확률은? [4점]

① $\frac{6}{19}$ ② $\frac{13}{38}$ ③ $\frac{7}{19}$ ④ $\frac{15}{38}$ ⑤ $\frac{8}{19}$

단답형

29. 같은 종류의 사탕 7개와 같은 종류의 초콜릿 3개를 세 학생 A, B, C에게 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

각 학생이 받는 사탕의 개수는 그 학생이 받는 초콜릿의 개수보다 크거나 같다.

30. 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 있다. 이 7개의 공을 모두 임의로 일렬로 나열하는 시행을 한다. 이 시행에서 이웃한 두 공의 색이 서로 다른 곳의 개수가 4일 때, 나열된 공이 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이웃한 두 공의 색이 같으면 그 두 공에 적혀 있는 수의 차는 1이다.



(이웃한 두 공의 색이 서로 다른 곳이 4개인 예)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{x}}{x}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

24. $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{2+\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\frac{1}{2}+\ln 2$ ③ $1+\ln 2$

④ $\frac{3}{2}+\ln 2$ ⑤ $2+\ln 2$

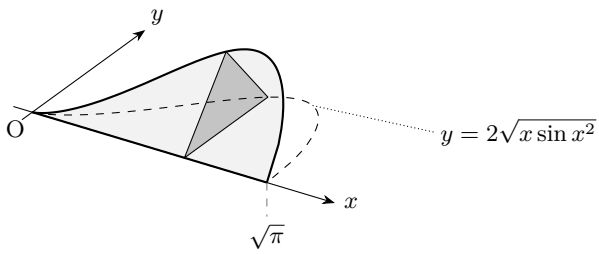
25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2+b_n}{na_n+b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{x\sin x^2}\ (0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 밑면 위의 선분을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

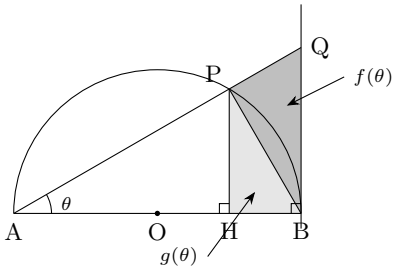


① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

27. 곡선 $x^2 + xy + e^y = k$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 y절편은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

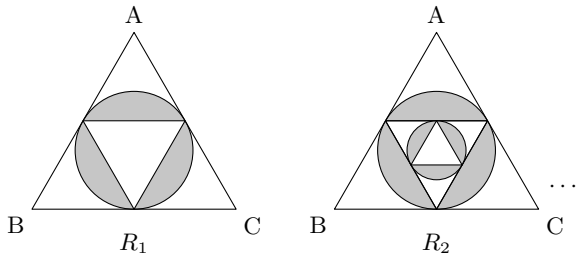
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P를 $\angle PAB = \theta$가 되도록 잡고, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PBQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PHB의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 내접하는 원을 그리고, 이 원과 세 변 BC, CA, AB의 접점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 그린다. 원의 내부 중 이 삼각형의 외부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그린 삼각형에 같은 방법으로 내접원과 접점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 그리고, 원의 내부 중 새로 그린 삼각형의 외부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a\pi - b\sqrt{3}}{9}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]



30. $p(0) = -1$인 이차함수 $p(x)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \int_0^x p(t)e^t\,dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p(4)$의 최댓값을 구하시오. $\left(\text{단, } \lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0\right)$ [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
(나) 방정식 $f(x) = f(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$에 대하여 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

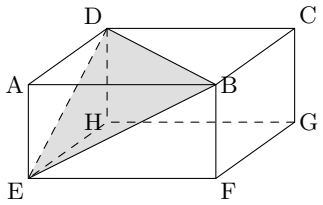
24. 주축의 길이가 4이고 두 점근선의 방정식이 $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$인 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, 두 초점은 x축 위에 있다.) [3점]

① $2\sqrt{11}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\,2,\,1)$, $\mathrm{B}(6,\,-2,\,3)$에 대하여 x축 위의 점 P가 $\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$를 만족시킨다. 이를 만족시키는 서로 다른 두 점 P 사이의 거리는? [3점]

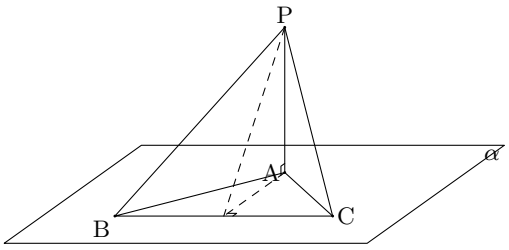
① $2\sqrt{7}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ 6 ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{11}$

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 4$, $\overline{\mathrm{AE}} = 2$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 평면 BDE와 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]



① $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\dfrac{5}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

27. 그림과 같이 평면 α 위에 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 A이고 $\overline{PA} = 4$일 때, 삼각형 PBC의 넓이는? [3점]

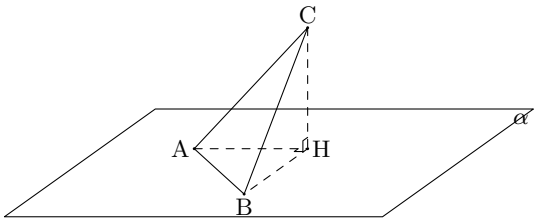


① $10\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $14\sqrt{2}$ ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 평면 α 위에 $\overline{AB} = 5$인 두 점 A, B가 있고, 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자. 네 점 A, B, C, H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$이고 $\overline{AH} < \overline{BH}$이다.
(나) 삼각형 ABC의 넓이는 10이고, 삼각형 ABH의 넓이는 6이다.

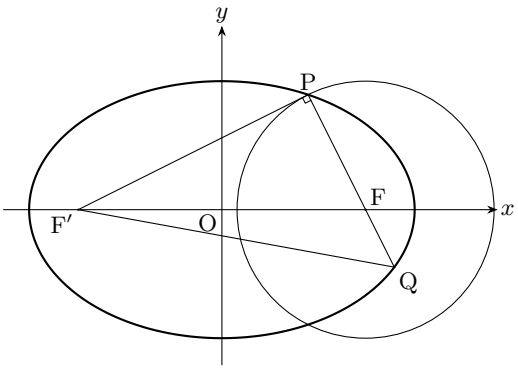
삼각형 ABC의 평면 BCH 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{28}{5}$ ② $\frac{29}{5}$ ③ 6 ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{32}{5}$

단답형

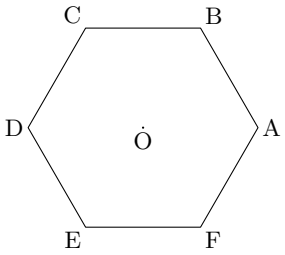
29. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(5,\,0)$, $\mathrm{F}'(-5,\,0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 점 F를 중심으로 하고 넓이가 20π인 원 C가 있다. 타원과 원 C가 제1사분면에서 만나는 점 P에 대하여 직선 PF'이 원 C에 접한다. 직선 PF가 타원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 삼각형 PQF'의 넓이를 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF가 있다. 정육각형의 변 위의 두 점 P, Q가

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\vec{0}$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



제 5 회 빠른 정답

공통과목

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
①	⑤	③	①	④	⑤	②	⑤	③	②	①

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
④	③	②	④	7	45	16	18	9	36	50

선택과목(확률과 통계)

23	24	25	26	27	28	29	30
⑤	③	④	①	②	⑤	150	35

선택과목(미적분)

23	24	25	26	27	28	29	30
③	③	④	①	②	⑤	28	15

선택과목(기하)

23	24	25	26	27	28	29	30
②	③	④	①	②	⑤	30	9

공통과목(수학 I, 수학 II)

1. **정답 ①**

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = (2^{-3})^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} = 2$

따라서 주어진 식 $= \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$

2. **정답 ⑤**

$x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다. $f(x)$는 연속이므로 $f(2) = 5$

이때 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3$

따라서 $f(2) + f'(2) = 5 + 3 = 8$

3. **정답 ③**

공차를 d라 하면 $S_6 = 6 + 15d$, $S_3 = 3 + 3d$

$6 + 15d = 3(3 + 3d) + 9 = 18 + 9d$에서 $d = 2$

따라서 $S_{10} = \frac{10\{2 \times 1 + 9 \times 2\}}{2} = 100$

4. **정답 ①**

양변에 $x = 2$를 대입하면 $0 = 8 - 6 + a$에서 $a = -2$

$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$ 이므로 $x \neq 2$일 때 $f(x) = (x + 1)^2$

(연속이므로 $f(2) = 9$) 따라서 $f(a) = f(-2) = (-1)^2 = 1$

5. **정답 ④**

$\int_{-1}^{2} f + \int_{2}^{3} f = \int_{-1}^{3} f$ 이므로 주어진 식 $= \int_{-1}^{3} f - \int_{1}^{3} f = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (6x^2 + 2x)\,dx = 2\int_{0}^{1} 6x^2\,dx = 4$

6. **정답 ⑤**

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = \frac{3}{5}$에서 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta > 0$에서 $\cos\theta < 0$이므로 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$

7. 정답 ②

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a+6) = (a-6)(a+3) \leq 0$, $-3 \leq a \leq 6$
따라서 정수 a의 개수는 10

8. 정답 ⑤

$9^a = 3^{2a} = 4$에서 $3^a = 2$, 즉 $a = \log_3 2$
$b = \log_3 \frac{81}{8}$
$3a + b = \log_3 8 + \log_3 \frac{81}{8} = \log_3 81 = 4$

9. 정답 ③

$v_1(t) = v_2(t)$에서 $6t^2 - 12t - 18 = 0$, $6(t+1)(t-3) = 0$
이므로 $t = 3$
$v_1(t) = 6t(t-1)$은 $0 < t < 1$에서 음수, $t > 1$에서 양수이므로 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|\,dt = -\int_0^1 (6t^2 - 6t)\,dt + \int_1^3 (6t^2 - 6t)\,dt$$
$$= 1 + 28 = 29$$

10. 정답 ②

사인법칙에서 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin A} = 2 \times 3$이므로 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
A는 둔각이므로 $\cos A = -\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = -\frac{1}{3}$
$\overline{AC} = x$라 하면 코사인법칙에서 $32 = 4 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
$3x^2 + 4x - 84 = 0$, $(3x - 14)(x + 6) = 0$이므로 $x = \frac{14}{3}$

11. 정답 ①

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) + (x+2)f'(x) = f(x) + 6x^2 + 2ax + b$
즉 $(x+2)f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$이므로 $f'(x) = 6x + m$ (m은 상수)이라 하면
$(x+2)(6x+m) = 6x^2 + (12+m)x + 2m$에서 $2a = 12 + m$, $b = 2m$
주어진 식에 $x = -2$를 대입하면 $0 = -16 + 4a - 2b$이므로
$4a - 2b = 16$
$2(12+m) - 4m = 16$에서 $m = 4$, 즉 $f'(x) = 6x + 4$
$f(2) - f(0) = \int_0^2 (6x+4)\,dx = 12 + 8 = 20$

12. 정답 ④

공차를 d라 하면 $d = a_2 - a_1$은 양의 정수이다. $a_4 = c$라 하면 $a_2 = c - 2d$, $a_6 = c + 2d$이므로
$(c-2d)(c+2d) = -20$, 즉 $(2d-c)(2d+c) = 20$
두 인수의 합 $4d$가 짝수이므로 두 인수는 모두 짝수이고 합이 양수이므로
$(2d-c,\ 2d+c) = (2,\ 10)$ 또는 $(10,\ 2)$, 즉 $(d,\ c) = (3,\ 4)$ 또는 $(3,\ -4)$
$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10a_1 + 45d = 10(c - 3d) + 45d = 10c + 15d$이므로
값은 85 또는 5
$M - m = 85 - 5 = 80$

13. 정답 ③

$f'(x) = 3x^2 - 6x$이므로 $f'(1) = -3$이고 l: $y = -3x + 1$
$f(x) - (-3x+1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$
$0 \leq x \leq 1$에서 $f(x) \leq -3x + 1$, $1 \leq x \leq 3$에서 $f(x) \geq -3x + 1$이므로 $A = \int_0^1 \{-(x-1)^3\}dx = \frac{1}{4}$,
$B = \int_1^3 (x-1)^3 dx = 4$
따라서 $A - B = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$

14. 정답 ②

$\overline{BC} = \overline{CD}$이므로 $\angle BAC = \angle CAD = \theta$이고, 삼각형 ABC에서 $\cos\theta = \frac{4 + 16 - 9}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{11}{16}$, $\sin\theta = \frac{3\sqrt{15}}{16}$.
$\overline{AD} = x$라 하면 삼각형 ACD에서 $9 = x^2 + 16 - 8x \cdot \frac{11}{16}$,
$2x^2 - 11x + 14 = 0$, $x = 2$ 또는 $x = \frac{7}{2}$.
$x = 2$이면 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$(SAS)이므로 $\angle ABC = \angle ADC$. 원에 내접하므로 두 각의 합이 $180°$, 각각 $90°$가 되어 $\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \neq 16$으로 모순. 따라서 $\overline{AD} = \frac{7}{2}$. (이때 점 D는 실제로 원 위에 있다: $\cos(\angle ADC) = -\cos(\angle ABC)$를 확인할 수 있다.)
넓이 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sin\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 4\sin\theta = 11\sin\theta = \frac{33\sqrt{15}}{16}$.

15. 정답 ④

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하자. $x>0$이면 $g(x)>0$. $x<0$이면 $g(x)=-\int_x^0|f|+\left|\int_x^0 f\right|\le 0$이고, 등호는 $[x,0]$에서 f의 부호가 바뀌지 않을 때만. (가) $\Rightarrow$ f는 $x=-2$에서 부호가 바뀌고 $(-2,0)$에서는 바뀌지 않는다: $f(x)=(x+2)(x-\beta)$, $\beta<-2$ 또는 $\beta\ge 0$.

$\int_0^x|f|$는 미분가능하므로, g가 미분가능하지 않은 점은 $|F|$가 꺾이는 점, 곧 F의 단순근이다. $F(x)=x\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2-\beta}{2}x-2\beta\right)$.

- $\beta\neq 0$이면 $x=0$이 F의 단순근이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (나)의 그 점은 음수여야 하므로 모순.
- $\beta=0$: $F(x)=x^2\left(\frac{x}{3}+1\right)$, 단순근은 $x=-3$뿐 ($x=0$은 중근). (나)를 만족.

$f(x)=x^2+2x$. $[0,3]$에서 $f\ge 0$이므로 $g(3)=2\int_0^3(x^2+2x)\,dx=2(9+9)=36$.

16. 정답 7

진수의 조건에서 $2<x<12$이다. 주어진 부등식은 $\log_2(x-2)(12-x)\ge\log_2 16$이고 밑이 1보다 크므로 $(x-2)(12-x)\ge 16$, $x^2-14x+40\le 0$, $(x-4)(x-10)\le 0$, $4\le x\le 10$. 진수의 조건과 함께 $4\le x\le 10$이므로 정수 x는 $4,5,\dots,10$의 7개.

17. 정답 45

$\int_0^2(3x^2+kx)\,dx=\left[x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^2=8+2k=16$이므로 $k=4$. 따라서 $\int_0^3(3x^2+4x)\,dx=\left[x^3+2x^2\right]_0^3=27+18=45$.

18. 정답 16

$\overline{BC}=a$라 하면 코사인법칙에 의하여 $41=25+a^2-2\times 5\times a\times\frac{3}{5}$, $a^2-6a-16=0$, $(a-8)(a+2)=0$이므로 $a=8$. $\sin B=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{4}{5}=16$.

19. 정답 18

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$. $f(-1)=-18$, $f(1)=2$(극대), $f(3)=-2$(극소), $f(4)=2$이므로 닫힌구간 $[-1,4]$에서 최댓값은 2, 최솟값은 -18이다. $-k\le f(x)\le k$가 항상 성립하려면 $k\ge 18$이고 $k\ge 2$이므로 k의 최솟값은 18.

20. 정답 9

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 직선 $y=-x+k$는 $y=x$와 수직이므로 $\mathrm{A}(t,\,2^t)$라 하면 $\mathrm{B}(2^t,\,t)$, $k=t+2^t$, $\mathrm{C}(t+2^t,\,0)$

$t\le 0$이면 B가 x축 위 또는 아래에 있고 $\overline{AB}=\sqrt{2}(2^t-t)>\sqrt{2}|t|=\overline{BC}$이므로 $t>0$

$\overline{AB}=\sqrt{2}(2^t-t)$, $\overline{BC}=\sqrt{2}\,t$이므로 $2^t-t=t$, 즉 $2^t=2t$

곡선 $y=2^t$와 직선 $y=2t$는 $t=1$, $t=2$에서만 만나므로 $k=1+2=3$ 또는 $k=2+4=6$

모든 k의 값의 합은 $3+6=9$

21. 정답 36

$f'(a)\neq 0$이면 극한이 존재하고, $f'(a)=0$이면 $f(a)=0$일 때만 존재한다($f(a)\neq 0$이면 발산, $f(a)=0$이면 f가 a에서 중근 이상이라 극한값 0). 즉 (가) $\iff$ $f'(c)=0$인 모든 c에서 $f(c)=0$.

f가 서로 다른 두 실근 $r_1<r_2$를 가지면 (r_1,r_2)에서 $f\neq 0$인 극값이 생기므로 불가. 사차함수의 허근은 짝을 이루므로 f의 실근은 2 하나이고 중복도는 2 또는 4:

$f(x)=(x-2)^2(x^2+px+4)$ ($f(0)=16$에서 상수항 4)

$x^2+px+4>0$ ($-4<p<4$) 또는 $p=-4$ ($f=(x-2)^4$).

$f'(x)=(x-2)\{4x^2+(3p-4)x+8-2p\}$이므로 중괄호의 이차식은 $x=2$ 이외의 실근을 갖지 않아야 한다. 판별식 $9p^2+8p-112<0$ $\iff$ $-4<p<\frac{28}{9}$. 판별식이 0인 $p=\frac{28}{9}$은 $x=-\frac{2}{3}$에서 $f'=0$, $f\neq 0$이라 제외, $p=-4$는 중괄호가 $4(x-2)^2$이 되어 포함. 따라서 $-4\le p<\frac{28}{9}$.

$f(1)=5+p$이므로 $1\le f(1)<\frac{73}{9}$, 가능한 정수는 $1,2,\cdots,8$이고 합은 36.

22. 정답 50

모든 항은 $-3\le a_n\le k-1$인 정수이다. 이 $k+3$개

의 정수에서 $a_n \geq 0$이면 $a_{n+1} = a_n - 3$, $a_n < 0$이면 $a_{n+1} = a_n + k = a_n - 3 + (k+3)$이므로, a_n은 '$k+3$으로 나눈 나머지'를 기준으로 매번 3씩 줄어드는 것과 같다.

따라서 $a_1 = 0$ 다음에 처음으로 다시 0이 되는 것은 $3j$가 $k+3$의 배수가 되는 최소의 자연수 j번 뒤, 즉 $j = \dfrac{k+3}{\gcd(3,k)}$번 뒤이고, 그 뒤로는 j항마다 0이 반복된다.

15 이하에서 0이 a_1, a_{15} 두 번뿐이려면 $j = 14$.

- k가 3의 배수가 아닐 때: $k+3 = 14$, $k = 11$
- k가 3의 배수일 때: $\dfrac{k+3}{3} = 14$, $k = 39$

(확인 : $k = 11$ 이면 $0, -3, 8, 5, 2, -1, 10, 7, 4, 1, -2, 9, 6, 3, 0.$) 최댓값과 최솟값의 합은 $39 + 11 = 50$.

선택과목(확률과 통계)

23. **정답 ⑤**

서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_3\mathrm{H}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36$

24. **정답 ③**

모든 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4 = 81$
여사건은 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \le 5$인 사건이다. 함숫값이 모두 1 이상이므로
합이 4: 모두 1인 1가지, 합이 5: 하나만 2이고 나머지가 1인 4가지
여사건의 확률은 $\frac{5}{81}$이므로 구하는 확률은 $1-\frac{5}{81}=\frac{76}{81}$

25. **정답 ④**

b, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}=6$
이 네 문자의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 a를 하나씩 놓으면 a끼리 이웃하지 않으므로 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 10 = 60$

26. **정답 ①**

$\mathrm{P}(X \ge 2) = b+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{1}{3}$
확률의 합이 1이므로 $a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,\ a=\frac{1}{6}$
$\mathrm{E}(X) = 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

27. **정답 ②**

그래프와 x축으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times a = 1,\ a=\frac{1}{3}$
$0 \le x \le 1$에서 $f(x)=\frac{1}{3}x$, $1 \le x \le 3$에서 $f(x)=\frac{1}{3}$
이므로
$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 2\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) + \mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$

28. **정답 ⑤**

한 번의 시행에서 $+2, +1, -1$만큼 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이다.
4번 중 $+2, +1, -1$의 횟수를 p, q, r라 하면 $p+q+r=4$, $2p+q-r=2$에서 $3p+2q=6$
즉 $(p,q,r)=(0,3,1)$ 또는 $(2,0,2)$
$(0,3,1)$: $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{32}{256}$, $(2,0,2)$: $\frac{4!}{2!\,2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{6}{256}$
따라서 4번 후 좌표가 2일 확률은 $\frac{38}{256}$
2번째 시행 후 좌표가 0이려면 처음 두 번이 $+1, -1$ (순서 무관)이어야 하므로 $(0,3,1)$인 경우이고, 나머지 두 번은 모두 $+1$이다. 이 확률은 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{16}{256}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{38}=\frac{8}{19}$

29. **정답 150**

A, B, C가 받는 초콜릿의 개수를 c_1, c_2, c_3이라 하면 (c_1,c_2,c_3)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$
각 경우에 학생마다 먼저 초콜릿의 개수만큼 사탕을 주면 $c_1+c_2+c_3=3$개의 사탕을 쓰고, 남은 4개의 사탕을 세 학생에게 나누어 주면 조건을 만족시킨다. 그 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = 15$
따라서 구하는 경우의 수는 $10\times 15 = 150$

30. **정답 35**

색이 바뀌는 곳이 4개이면 같은 색이 이어진 묶음이 5개이므로 색의 배열은 흰-검-흰-검-흰 또는 검-흰-검-흰-검이다.
전체 (i) 흰-검-흰-검-흰: 흰 공 4개를 3묶음으로 나누는 방법 3가지, 검은 공 3개를 2묶음으로 나누는 방법 2가지, 공을 나열하는 방법 $4!\times 3! \Rightarrow 3\times 2\times 144 = 864$
(ii) 검-흰-검-흰-검: $1\times 3\times 144 = 432 \Rightarrow$ 전체 1296
조건 각 묶음은 연속한 수가 증가 또는 감소하는 순서로 놓여야 한다.

(i) 흰 공: 크기 2인 묶음은 $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}$ 중 하나이고 순서 2가지, 나머지 두 공의 배치 2가지 $\Rightarrow 3\times(3\times2\times2)=36$

검은 공: 크기 2인 묶음은 $\{1,2\},\{2,3\}$ 중 하나, 순서 2가지 $\Rightarrow 2\times(2\times2)=8 \quad \therefore 36\times8=288$

(ii) 검은 공: $3!=6$, 흰 공: $(1,3),(3,1)$로 나눌 때 각각 $\{1,2,3\},\{2,3,4\}$와 순서 2가지로 4가지, $(2,2)$로 나눌 때 $\{1,2\},\{3,4\}$의 순서와 각 묶음의 순서로 $2\times2\times2=8$가지

$\Rightarrow 6\times16=96$

조건을 만족시키는 경우의 수는 $288+96=384$

따라서 확률은 $\dfrac{384}{1296}=\dfrac{8}{27}$ 이므로 $p+q=27+8=35$

선택과목(미적분)

23. **정답 ③**

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4\times\dfrac{e^{4x}-1}{4x}-\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)=4-1=3$

24. **정답 ③**

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고 $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$\displaystyle\int_1^e\frac{2+\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx=\int_0^1\frac{2+t}{1+t}\,dt=\int_0^1\left(1+\frac{1}{1+t}\right)dt=\Big[t+\ln(1+t)\Big]_0^1=1+\ln 2$

25. **정답 ④**

분모와 분자를 각각 n^2으로 나누면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2+b_n}{na_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{b_n}{n^2}}{\frac{a_n}{n}+\frac{b_n}{n^2}}=\dfrac{4+3}{2+3}=\dfrac{7}{5}$

26. **정답 ①**

$0\le t\le\sqrt{\pi}$인 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 빗변의 길이가 $2\sqrt{t\sin t^2}$인 직각이등변삼각형이다. 빗변의 길이가 l인 직각이등변삼각형의 넓이는 $\dfrac{l^2}{4}$이므로 단면의 넓이는 $t\sin t^2$

$t^2=u$로 놓으면 구하는 부피는

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}t\sin t^2\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin u\,du=\frac{1}{2}\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}=1$

27. **정답 ②**

점 $(2,\,0)$이 곡선 위에 있으므로 $k=4+0+1=5$

$x^2+xy+e^y=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\dfrac{dy}{dx}+e^y\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+e^y}$

점 $(2,\,0)$에서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{3}$이므로 접선은 $y=-\dfrac{4}{3}(x-2)$

따라서 y절편은 $\dfrac{8}{3}$

28. **정답 ⑤**

반원의 중심을 O라 하면 $\angle\mathrm{POB}=2\theta$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{HB}}=1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{AB}}\tan\theta=2\tan\theta$이고 점 P와 직선 BQ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{HB}}$이므로

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 2\tan\theta\times 2\sin^2\theta=\dfrac{2\sin^3\theta}{\cos\theta}$

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 2\sin^2\theta\times\sin 2\theta=2\sin^3\theta\cos\theta$

$f(\theta)-g(\theta)=\dfrac{2\sin^3\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\dfrac{2\sin^5\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{2\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^5\times\dfrac{1}{\cos\theta}\right\}=2$

29. **정답 28**

정삼각형에서 내접원과 각 변의 접점은 각 변의 중점이므로 새로 그린 삼각형은 한 변의 길이가 원래의 $\dfrac{1}{2}$인 정삼각형이다.

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로

$S_1=\pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

닮음비가 $\dfrac{1}{2}$이므로 새로 색칠되는 넓이는 매번 $\dfrac{1}{4}$배가 되어

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{16\pi}{9}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{16\pi-12\sqrt{3}}{9}$

따라서 $a=16$, $b=12$이고 $a+b=28$

30. **정답 15**

$f'(x)=p(x)e^x$이고 (가)에서 $p(1)=0$이므로 $p(x)=c(x-1)(x-b)$ $(c\ne 0)$라 하면 $p(0)=cb=-1$, $b=-\dfrac{1}{c}$

(i) $c<0$일 때, $b>0$이고 $x=1$에서 극소이려면 $b>1$. 이때 $f(x)$는 $(1,\,b)$에서 증가, $(b,\,\infty)$에서 감소하고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 $x>b$에서 $f(x)=f(1)$인 근이 하나 더 있어 (나)에 모순

(ii) $c>0$일 때, $b<0<1$이고 $f(x)$는 $(-\infty,\,b)$에서 증가, $(b,\,1)$에서 감소, $(1,\,\infty)$에서 증가하므로 $x=1$에서 극소이다.

$\displaystyle\int(t-1)(t-b)e^t\,dt=\{t^2-(b+3)t+2b+3\}e^t+C$이므로

$f(1)-f(x)=\displaystyle\int_x^1 p(t)e^t\,dt=c(1+b)e-c\{x^2-(b+3)x+2b+3\}e^x$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-f(1)\}=-c(1+b)e=(1-c)e$

$x<b$에서 $f(x)$는 증가하여 $f(x)>\lim_{x\to-\infty}f(x)$이므로 (나)를 만족시킬 조건은

$f(1) \leq \lim_{x \to -\infty} f(x)$, 즉 $(1-c)e \geq 0,\ 0 < c \leq 1$

$p(4) = 3c(4-b) = 3c\left(4 + \frac{1}{c}\right) = 12c + 3 \leq 15$

$c = 1$일 때 $p(x) = x^2 - 1,\ f(x) = (x-1)^2 e^x - 1$이고

$f(x) = f(1)$의 실근은 $x = 1$뿐이다.

따라서 $p(4)$의 최댓값은 15

선택과목(기하)

23. **정답 ②**

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\,3)$, $2\vec{a}-\vec{b}=(7,\,0)$이므로 내적은 14

24. **정답 ③**

쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 $2a=4$, $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$이므로 $a=2$, $b=3$

$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{13}$

25. **정답 ④**

$\mathrm{P}(t,\,0,\,0)$이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-t)(6-t)+2\times(-2)+1\times 3=t^2-6t-1=0$

두 근의 차는 $\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$

26. **정답 ①**

점 A에서 BD에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\mathrm{AI}}=2\sqrt{2}$이다. $\overline{\mathrm{EA}}\perp$(평면 ABCD), $\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{EI}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$

따라서 $\theta=\angle\mathrm{EIA}$이고 $\overline{\mathrm{EI}}=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

27. **정답 ②**

선분 BC의 중점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{25-9}=4$

$\overline{\mathrm{PA}}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

삼각형 PBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

28. **정답 ⑤**

$\overline{\mathrm{AH}}=p$, $\overline{\mathrm{BH}}=q$라 하면 $p^2+q^2=25$, $\frac{1}{2}pq=6$이므로 $p+q=7$, $p<q$에서 $p=3$, $q=4$

H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\mathrm{HI}}=\frac{12}{5}$이고 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CI}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이다.

평면 ABC와 α가 이루는 각 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$이므로 $\tan\theta=\frac{4}{3}$, $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{HI}}\tan\theta=\frac{16}{5}$

$\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{BH}}$, $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{CH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}\perp$(평면 BCH), 즉 점 A의 평면 BCH 위로의 정사영은 H이다.

따라서 구하는 넓이는 삼각형 HBC의 넓이 $\frac{1}{2}\times 4\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$

29. **정답 30**

원 C의 반지름은 $2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{5}$이고, 직선 PF'이 P에서 원에 접하므로 $\overline{\mathrm{PF}'}\perp\overline{\mathrm{PF}}$이다.

$\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{100-20}=4\sqrt{5}$이므로 $2a=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=6\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{QF}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{QF}'}=6\sqrt{5}-t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{5}+t$이고 직각삼각형 PQF'에서

$(6\sqrt{5}-t)^2=(2\sqrt{5}+t)^2+80$, $180-12\sqrt{5}t=100+4\sqrt{5}t$, $t=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{5}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}=30$

30. **정답 9**

정육각형의 중심 O를 시점으로 하는 위치벡터를 쓰면 $\vec{d}=-\vec{a}$, $\vec{f}=-\vec{c}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{q}+\vec{a})=\vec{p}+\vec{q}=\vec{0}$이므로 Q는 P의 O에 대한 대칭점이고, P가 변 위에 있으면 Q도 변 위에 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=\vec{q}-\vec{f}=\vec{c}-\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

선분 AC의 중점을 N이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{4}=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2-12$ $(\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{3})$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FQ}}=12-|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|^2$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|$이 최소일 때 최대이다.

$\overline{\mathrm{BN}}=2$, $\angle\mathrm{ABN}=\angle\mathrm{CBN}=\frac{\pi}{3}$이므로 N에서 두 변 AB, BC까지의 거리는 $\sqrt{3}$이고, 나머지 변까지의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이상이다.

최댓값은 $12-3=9$