5지선다형

1. $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+2} \div 9^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3 ④ 9 ⑤ 27

2. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, \quad \frac{a_5 + a_6}{a_3 + a_4} = 4$$

일 때, $a_2 + a_4$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

4. 실수 a에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & (x < a) \\ x^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

5. 함수 $f(x) = (x^2 + a)(x - 3)$에 대하여 $f'(1) = 2$일 때, $f'(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a\sin\frac{x}{b} + 1$의 최솟값이 -3이고 주기가 4π일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt = 2x^3 + ax^2 + 4$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

8. 두 실수 a, $b\,(1 < a < b)$가

$$\log_2 a + \log_a b = 4, \quad \log_2 a \times \log_a b = 3$$

을 만족시킬 때, $a + b$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 2x$에 대하여

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + 36$$

을 만족시키는 양수 a의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

10. 두 양수 a, b와 상수 c에 대하여 함수

$$f(x) = a\cos bx + c$$

의 주기는 함수 $y = 3\tan 2x$의 주기와 같다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 9이고 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은? [4점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

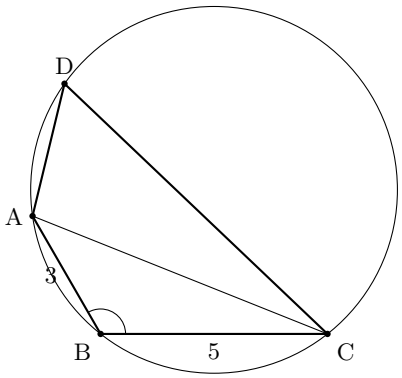
11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) - \int_2^x f(t)\,dt = 4x^3 + ax^2 + 8$$

을 만족시킨다. $f(0) = 2$일 때, $f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

12. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$, $\angle ABC = \frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC의 외접원 위의 점 중 B가 아닌 점 D가 $\overline{AD} = \overline{AB}$를 만족시킨다. 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{39\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{41\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{43\sqrt{3}}{4}$

13. 실수 k에 대하여 함수 $f(x) = 3x^2 - 2kx$가 있다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

ㄴ. $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 0$이면 $k = 3$이다.

ㄷ. $\int_{0}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$를 만족시키는 실수 k의 최댓값은 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 2 이상의 자연수 m에 대하여 $\log_m k$의 값이 자연수가 되도록 하는 300 이하의 자연수 k의 개수를 a_m이라 하자. 2 이상 300 이하의 자연수 n 중에서

$$\frac{1}{n}\sum_{m=2}^{n} a_m$$

의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x<0) \\ x^3+bx^2+cx & (x\geq 0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$f(2)=2$일 때, $f(-1)+f(4)$의 값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1}=n(n+1)(n+2)$$

를 만족시킬 때, a_3의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)-2x^3+6x^2$$

을 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(b_k+1)=60, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)(b_k-1)=12$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)(b_k-2)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$의 극댓값과 극솟값의 합이 8일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases}|2^x-16| & (x\le 5)\\ 2^{9-x} & (x>5)\end{cases}$$

에 대하여 직선 $y=t$ (t는 실수)와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $\sum_{t=1}^{20}g(t)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)}{f(x)}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{f(x)}=0,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)}{f(x)}=2$

가능한 모든 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1}-a_n+4)(2a_{n+1}+a_n)=0$$

을 만족시키고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 자연수이고, $a_6=0$이다.
(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$이다.

가능한 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

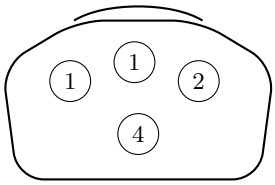
25. 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 $95\,\%$의 신뢰구간의 길이가 3.92이다. 이 모집단에서 크기가 $4n$인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 $99\,\%$의 신뢰구간의 길이는? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 1.29 ② 1.96 ③ 2.58
④ 3.92 ⑤ 5.16

26. 남학생 4명과 여학생 3명이 모두 일렬로 임의로 설 때, 양 끝 중 적어도 한 곳에 여학생이 서게 될 확률은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

27. 숫자 1이 적혀 있는 공 2개, 숫자 2가 적혀 있는 공 1개, 숫자 4가 적혀 있는 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+1)=8$일 때, 양수 a의 값은? [3점]



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

28. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(a)=a$를 만족시키는 집합 X의 원소 a의 개수는 1이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

단답형

29. 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$, $\mathrm{N}(n, 2^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \le 20) = \mathrm{P}(X \ge 32)$
(나) $\mathrm{P}(X \le 22) + \mathrm{P}(Y \le 27) = 1$

$\mathrm{P}(24 \le Y \le 28)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 할 때, $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

30. 탁자 위에 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.



주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
2 이하이면 5개의 동전 중 임의로 1개를 택하여 뒤집고,
3 이상이면 5개의 동전 중 임의로 서로 다른 2개를 택하여 동시에 뒤집는다.

이 시행을 3번 반복한 후 뒷면이 보이는 동전의 개수가 3일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x \tan x}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

24. $\int_1^2 \frac{3x+1}{x^2+x} dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln 4$ ② $\ln \frac{9}{2}$ ③ $\ln 5$ ④ $\ln \frac{11}{2}$ ⑤ $\ln 6$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{2n^2+1} = 1$$

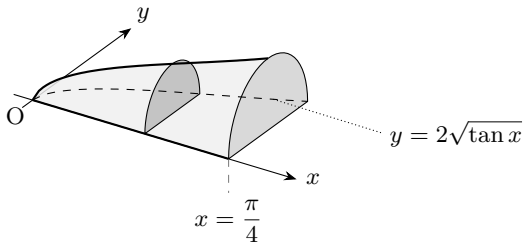
을 만족시킬 때,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{a_n^2+4n} - a_n\right)$$

의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

26. 그림과 같이 곡선 $y = 2\sqrt{\tan x}\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$와 x축 및 직선 $x = \frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi}{12}\ln 2$ ② $\frac{\pi}{8}\ln 2$ ③ $\frac{\pi}{6}\ln 2$ ④ $\frac{\pi}{5}\ln 2$ ⑤ $\frac{\pi}{4}\ln 2$

27. 양수 a에 대하여 함수 $f(x) = e^{2x-2} + ax$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 기울기와 y절편의 합은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

28. 함수 $f(x) = e^x + x^2$에 대하여 양수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. $S(1) + S'(1)$의 값은? [4점]

① $e - \frac{2}{3}$ ② $e - \frac{1}{3}$ ③ e ④ $e + \frac{1}{3}$ ⑤ $e + \frac{2}{3}$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4}{3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 4$$

를 만족시킨다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} > \frac{1}{10}$$

을 만족시키는 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 자연수 k에 대하여 열린구간 $(0,\ k)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \sin\left\{\frac{\pi}{2}x(k-x)\right\}$$

가 극대가 되는 x의 개수를 $N(k)$라 하자. 예를 들어 $N(1) = 1$이다. $\sum_{k=1}^{10} N(k)$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k,\,2)$, $\vec{b}=(1,\,k-3)$에 대하여 $\vec{a}+3\vec{b}=(8,\,8)$일 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

24. 초점이 $\mathrm{F}(1,\,4)$이고 준선이 직선 $y=-2$인 포물선이 점 $(a,\,4)$를 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

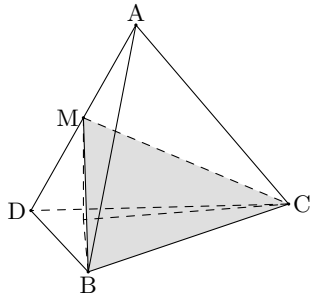
25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\,b,\,4)$, $\mathrm{B}(2,\,-1,\,c)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P는 z축 위에 있고, 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q는 xy평면 위에 있다. 선분 PQ의 길이는? [3점]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

26. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\,3)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 접선의 x절편은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

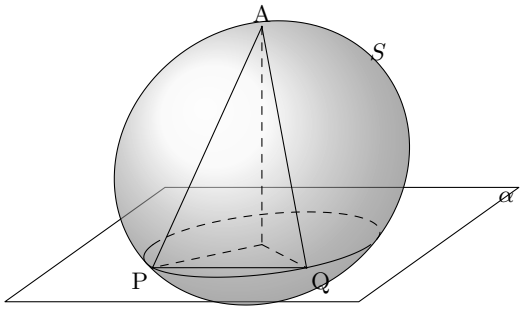
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 모서리 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MBC의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ③ $7\sqrt{3}$ ④ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

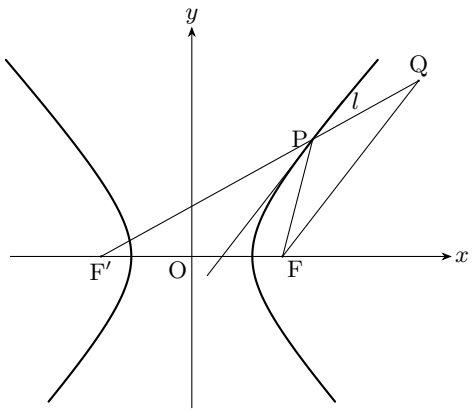
28. 반지름의 길이가 5인 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 넓이가 16π이다. 구 S 위의 점 중 평면 α까지의 거리가 최대인 점을 A라 하자. 원 C 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 삼각형 APQ의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 삼각형 APQ의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

단답형

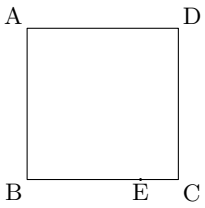
29. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(3,\,0)$, $\mathrm{F}'(-3,\,0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 직선 l에 평행한 직선이 직선 PF'과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=12$일 때, 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



30. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD와 선분 BC 위의 점 E가 $\overline{\mathrm{BE}}=3$을 만족시킨다. 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}|=8$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\le 8$

점 P가 나타내는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]



제 3 회 빠른 정답

공통과목

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
④	②	⑤	③	①	②	④	①	⑤	③	①

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
③	②	④	⑤	12	28	18	20	46	220	204

선택과목(확률과 통계)

23	24	25	26	27	28	29	30
④	②	③	⑤	①	④	624	289

선택과목(미적분)

23	24	25	26	27	28	29	30
③	②	③	⑤	①	④	9	56

선택과목(기하)

23	24	25	26	27	28	29	30
②	③	③	⑤	①	④	135	80

공통과목(수학 I, 수학 II)

1. 정답 ④

$\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+2} = 3^{2+2\sqrt{2}}$, $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$ 이므로
주어진 식 $= 3^{(2+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

2. 정답 ②

$y' = 3x^2 - 6x + 4$이므로 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는
$3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 4 = 4$

3. 정답 ⑤

공비를 $r\,(r > 0)$라 하면 $a_5 + a_6 = r^2(a_3 + a_4)$이므로
$r^2 = 4$, $r = 2$
따라서 $a_2 + a_4 = 2 \times 2 + 2 \times 2^3 = 4 + 16 = 20$

4. 정답 ③

$x = a$에서 연속이어야 하므로 $2a + 3 = a^2$
$a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) = 0$에서 $a = 3$ 또는 $a = -1$
따라서 모든 a의 값의 곱은 -3

5. 정답 ①

$f'(x) = 2x(x-3) + (x^2 + a)$
$f'(1) = -4 + 1 + a = a - 3 = 2$에서 $a = 5$
따라서 $f'(2) = 4 \times (-1) + (4 + 5) = 5$

6. 정답 ②

최솟값이 $-a + 1 = -3$이므로 $a = 4$
주기가 $\dfrac{2\pi}{1/b} = 2\pi b = 4\pi$이므로 $b = 2$
$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4\sin\dfrac{\pi}{6} + 1 = 2 + 1 = 3$

7. 정답 ④

양변에 $x = 1$을 대입하면 $0 = 2 + a + 4$에서 $a = -6$
양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) = 6x^2 - 12x = 6(x-1)^2 - 6$
따라서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1) = -6$

8. 정답 ①

$\log_2 a \times \log_a b = \log_2 b = 3$이므로 $b = 8$
$\log_2 a = t$라 하면 $\log_a 8 = \frac{3}{t}$이므로 $t + \frac{3}{t} = 4$, $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t = 1$ 또는 $t = 3$
$t = 3$이면 $a = 8 = b$이므로 $a < b$에 모순. 따라서 $t = 1$, $a = 2$
$a + b = 10$

9. 정답 ⑤

$3x^2$은 y축 대칭, $-2x$는 원점 대칭이므로 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} 3x^2\,dx = 2a^3$
$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = a^3 - a^2$이므로 $2a^3 = a^3 - a^2 + 36$, $a^3 + a^2 - 36 = 0$
$(a-3)(a^2+4a+12) = 0$이고 $a > 0$이므로 $a = 3$

10. 정답 ③

$y = 3\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$, $b = 4$
최댓값이 9이므로 $a + c = 9$이고, $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} + c = \frac{a}{2} + c = 6$
두 식에서 $a = 6$, $c = 3$이므로 최솟값은 $-a + c = -3$

11. 정답 ①

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) + xf'(x) - f(x) = 12x^2 + 2ax$, 즉 $xf'(x) = 12x^2 + 2ax$
$f'(x) = 12x + 2a$이고 $f(0) = 2$이므로 $f(x) = 6x^2 + 2ax + 2$
주어진 식에 $x = 0$을 대입하면 $-\int_{2}^{0} f(t)\,dt = 8$, 즉 $\int_{0}^{2} f(t)\,dt = 8$
$\int_{0}^{2} (6t^2 + 2at + 2)\,dt = 16 + 4a + 4 = 8$에서 $a = -3$
따라서 $f(x) = 6x^2 - 6x + 2$이고 $f(3) = 54 - 18 + 2 = 38$

12. 정답 ③

코사인법칙에서 $\overline{AC}^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos\frac{2}{3}\pi = 49$, $\overline{AC} = 7$
$\overline{AD} = \overline{AB}$이고 D≠B이므로 D는 B를 포함하지 않는 호 AC 위에 있고, 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\angle ADC = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$
$\overline{CD} = x$라 하면 $49 = 9 + x^2 - 3x$, $(x-8)(x+5) = 0$이므로 $x = 8$
(넓이)$= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

13. 정답 ②

ㄱ. $-2kx$는 원점에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx = 2$ (참)
ㄴ. $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 27 - 9k = 0$에서 $k = 3$ (참)
ㄷ. 등식이 성립하려면 $0 \le x \le 2$에서 $f(x) = x(3x-2k) \ge 0$이어야 한다. $k > 0$이면 $0 < x < \frac{2k}{3}$에서 $f(x) < 0$이므로 $k \le 0$이고, $k \le 0$이면 성립한다. 따라서 k의 최댓값은 0 (거짓)
옳은 것은 ㄱ, ㄴ

14. 정답 ④

$\log_m k = j$ (j는 자연수) $\iff k = m^j$이므로 a_m은 $m^j \le 300$인 자연수 j의 개수이다.

$$a_2 = 8,\ a_3 = 5,\ a_4 = 4,\ a_5 = a_6 = 3,$$
$$a_7 = \cdots = a_{17} = 2,\ a_m = 1\ (18 \le m \le 300)$$

($2^8 = 256$, $3^5 = 243$, $4^4 = 256$, $6^3 = 216$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$)
$T_n = \sum_{m=2}^{n} a_m$이라 하면 $T_2 = 8$, $T_3 = 13$, $T_4 = 17$, $T_5 = 20$, $T_6 = 23$, $7 \le n \le 17$에서 $T_n = 23 + 2(n-6) = 2n + 11$, $n \ge 17$에서 $T_n = 45 + (n-17) = n + 28$.

- $2 \le n \le 6$: T_n이 n의 배수인 것은 $n = 2$ (8), $n = 5$ (20)
- $7 \le n \le 16$: $n \mid 2n + 11 \iff n \mid 11$, $n = 11$
- $17 \le n \le 300$: $n \mid n + 28 \iff n \mid 28$, $n = 28$

따라서 $n = 2, 5, 11, 28$의 4개.

15. 정답 ⑤

$x = 0$에서 미분가능하므로 좌·우 미분계수가 같아 $c = a$.

- $x<0$: $f'(x)=2x+a$의 근 $-\frac{a}{2}$ ($a>0$일 때만), $f(x)=0$의 근 $-a$ ($a>0$일 때만)
- $x\geq 0$: $f'(x)=3x^2+2bx+a$, $f(x)=x(x^2+bx+a)$

$a<0$: $x<0$에서 근이 없고, $3x^2+2bx+a=0$은 두 근의 곱이 음수라 양근이 하나뿐 $\Rightarrow$ $f'=0$의 근 1개. (가)에 모순.

$a=0$: $f'(x)=0$의 근은 0과 ($b<0$이면) $-\frac{2b}{3}$, $f(x)=0$의 근은 0과 $-b$ $\Rightarrow$ (나)의 근은 최대 3개. 모순.

$a>0$: $x<0$에서 f'의 근 $-\frac{a}{2}$가 하나 있으므로 (가)에서 $3x^2+2bx+a=0$의 0 이상의 근이 정확히 1개여야 한다. 두 근의 곱이 양수이므로 양의 중근: $b<0$, $b^2=3a$. 이때 x^2+bx+a의 판별식 $b^2-4a=-a<0$이라 $x>0$에서 $f(x)\neq 0$. $ff'=0$의 근은 $-a$, $-\frac{a}{2}$, 0, $-\frac{b}{3}$의 4개로 (나)를 만족한다.

$f(2)=8+4b+2a=8+4b+\frac{2b^2}{3}=2\Rightarrow (b+3)^2=0, b=-3$, $a=c=3$. $f(-1)=1-3=-2$, $f(4)=64-48+12=28$이므로 $f(-1)+f(4)=26$.

---

16. 정답 12

$n=1$을 대입하면 $a_1a_2=6$이므로 $a_2=2$. $n=2$를 대입하면 $a_2a_3=24$이므로 $a_3=12$.

---

17. 정답 28

양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$이므로 $f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+12x$, 즉 $xf'(x)=6x^2-12x$. $f'(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=6x-12$이고 $f(x)=3x^2-12x+C$. $f(1)=-9+C=4$에서 $C=13$. 따라서 $f(5)=75-60+13=28$.

---

18. 정답 18

$P=\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$, $Q=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$라 하면 $P+Q+10=60$, $P-Q+10=12$이므로 $P=26$, $Q=24$. 따라서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)(b_k-2)=P-2Q+40=26-48+40=18$.

---

19. 정답 20

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다. $f(-1)=5+a$, $f(3)=-27+a$이므로 $(5+a)+(-27+a)=8$에서 $a=15$. 따라서 극댓값은 $f(-1)=20$.

---

20. 정답 46

$x<4$에서 $f(x)=16-2^x$은 감소하고 $0<f(x)<16$ (점근선 $y=16$)

$4\leq x\leq 5$에서 $f(x)=2^x-16$은 0에서 16까지 증가, $x>5$에서 $f(x)=2^{9-x}$은 16보다 작은 값에서 감소하며 0에 가까워진다. ($f(5)=16$이므로 연속)

따라서 $0<t<16$이면 각 구간에서 한 점씩 $g(t)=3$, $t=16$이면 $x=5$뿐이므로 $g(16)=1$, $t>16$이면 $g(t)=0$

$$\sum_{t=1}^{20}g(t)=3\times 15+1=46$$

---

21. 정답 220

$f(a)\neq 0$인 a에서는 극한이 항상 존재하므로 (가)는 f의 각 실근 r (중복도 m)에서 $f(x^2)$가 $x=r$을 중복도 m 이상의 근으로 가질 조건이다. 특히 $f(r^2)=0$이어야 하므로 r^2도 f의 실근이고, 다시 $r^4, r^8, \cdots$도 실근이다. 실근은 유한개이므로 $r\in\{0,1,-1\}$.

- $r=0$: $f(x^2)$에서 $x=0$의 중복도는 $2m$이라 항상 만족.
- $r=1$: $f(x^2)$에 $(x^2-1)^m$이 있어 만족.
- $r=-1$: 1이 중복도 m 이상의 근이어야 한다.

(나) $\lim_{x\to 0}=0$이면 $f(0)=0$(그렇지 않으면 극한값 1). $f(x)=(x-1)^mg(x)$ ($g(1)\neq 0$)이면 $\frac{f(x^2)}{f(x)}\to 2^m$이므로 $\lim_{x\to 1}=2$에서 1은 단순근.

실근이 0, 1(단순근)을 포함하므로 세 번째 근은 0 또는 -1: $f(x)=x^2(x-1)$ 또는 $f(x)=x(x-1)(x+1)$. (각각 $\frac{f(x^2)}{f(x)}=x^2(x+1)$, $x(x^2+1)$로 (가)(나)를 만족.)

$f(5)=25\cdot 4+5\cdot 4\cdot 6=100+120=220$.

---

22. 정답 204

주어진 식에서 $a_{n+1}=a_n-4$ 또는 $a_{n+1}=-\frac{a_n}{2}$. 따라서 $a_{n+1}=v$일 때 $a_n=v+4$ 또는 $a_n=-2v$.

$a_6=0$: $a_5=4$ ($a_5=0$은 (나)에 모순). $a_5=4$: $a_4=8$ 또는 -8.

- $a_4=8$: $a_3=12$ 또는 -16

- $a_4 = -8$: $a_3 = -4$ 또는 16

$a_3 = 12 \to a_2 = 16, -24$; $a_3 = -16 \to a_2 = -12, 32$; $a_3 = -4 \to a_2 = 0$(불가), 8; $a_3 = 16 \to a_2 = 20, -32$.

$a_2 = v$에서 $a_1 = v + 4$ 또는 $-2v$ 중 자연수인 것: $16 \to 20$, $-24 \to 48$, $-12 \to 24$, $32 \to 36$, $8 \to 12$, $20 \to 24$, $-32 \to 64$. (나머지 $-32, -64, -16, -40, -28$ 등은 자연수가 아니다.)

가능한 a_1은 $12, 20, 24, 36, 48, 64$ (24는 두 경로에서 나온다)이고 합은 204.

선택과목(확률과 통계)

23. **정답 ④**

$(x+2)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r\, x^{6-r}\, 2^r\ (r=0,1,\cdots,6)$
x^4항은 $r=2$일 때이므로 구하는 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2 = 15\times 4 = 60$

---

24. **정답 ②**

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B^C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
확률의 덧셈정리에서 $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \mathrm{P}(B) - \frac{1}{6}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$

---

25. **정답 ③**

크기가 n인 표본의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} = 3.92$이므로 $\sqrt{n}=5,\ n=25$
크기가 $4n=100$인 표본의 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는
$2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}} = 2.58$

---

26. **정답 ⑤**

여사건은 양 끝에 모두 남학생이 서는 사건이다.
양 끝에 남학생을 세우는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2 = 12$, 나머지 5명을 세우는 경우의 수는 $5!$이므로 여사건의 확률은 $\frac{12\times 5!}{7!} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$
따라서 구하는 확률은 $1-\frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

---

27. **정답 ①**

공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{4}$
$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1 = 2$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2}+1+4 = \frac{11}{2}$,
$\mathrm{V}(X) = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$
$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\mathrm{V}(X)}{3} = \frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{V}(a\overline{X}+1) = a^2\times\frac{1}{2} = 8$
$a>0$이므로 $a=4$

---

28. **정답 ④**

$f(a)=a$인 유일한 원소를 a라 하자. $g(x)=f(x)-x$라 하면 (가)에서 $g(x+1)-g(x) = f(x+1)-f(x)-1 \geq -1$
$a>1$이면 $f(1)\geq 1$, $f(1)\neq 1$이므로 $g(1)>0$이고, g는 한 번에 1보다 많이 줄지 않으므로 $x<a$에서 0을 거치지 않고는 음수가 될 수 없다. 즉 $x<a$이면 $x<f(x)\leq a$
같은 방법으로 $x>a$이면 $a\leq f(x)<x$
(i) $a=1$: $f(2)=1$, $f(3)\leq 2$, $f(4)\leq 3$, $f(5)\leq 4$이고 (가)를 만족시키는 경우는 14가지(아래 ※)
(ii) $a=2$: $f(1)=2$, $f(3)=2$, $2\leq f(4)\leq 3$, $2\leq f(5)\leq 4$
$\Rightarrow (f(4),f(5)) = (2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)$의 5가지
(iii) $a=3$: $(f(1),f(2)) = (2,3),(3,3)$, $(f(4),f(5)) = (3,3),(3,4) \Rightarrow 2\times 2 = 4$가지
(iv) $a=4$, (v) $a=5$는 각각 (ii), (i)과 대칭이므로 5가지, 14가지
따라서 구하는 개수는 $14+5+4+5+14 = 42$
※ (i)의 14: $f(3)=1$일 때 $(f(4),f(5))$는 $f(4)\in\{1,2,3\}$, $f(4)\leq f(5)\leq 4$에서 $4+3+2=9$, $f(3)=2$일 때 $f(4)\in\{2,3\}$에서 $3+2=5$

---

29. **정답 624**

(가)에서 정규분포 곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $m = \frac{20+32}{2} = 26$
(나)에서 $\mathrm{P}(Y\leq 27) = 1-\mathrm{P}(X\leq 22) = \mathrm{P}(X\geq 22) = \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{22-26}{4}\right) = \mathrm{P}(Z\geq -1) = \mathrm{P}(Z\leq 1)$
또 $\mathrm{P}(Y\leq 27) = \mathrm{P}\left(Z\leq\frac{27-n}{2}\right)$이므로 $\frac{27-n}{2} = 1$, $n=25$
$\mathrm{P}(24\leq Y\leq 28) = \mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 1.5) = 0.191+0.433 = 0.624$
따라서 $1000\times k = 624$

---

30. **정답 289**

뒷면이 보이는 동전의 개수를 T라 하자. 한 번의 시행에서

$T=t$일 때

• 1개 뒤집기 $\left(\text{확률 } \frac{1}{3}\right)$: $T=t+1$ $\left(\frac{5-t}{5}\right)$, $T=t-1$ $\left(\frac{t}{5}\right)$

• 2개 뒤집기 $\left(\text{확률 } \frac{2}{3}\right)$: $T=t+2$ $\left(\frac{{}_{5-t}\mathrm{C}_2}{10}\right)$, $T=t$ $\left(\frac{t(5-t)}{10}\right)$, $T=t-2$ $\left(\frac{{}_{t}\mathrm{C}_2}{10}\right)$

1회 후: $\mathrm{P}(T=1)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(T=2)=\frac{2}{3}$

2회 후: $T=1$에서 $T=0,1,2,3$이 될 확률은 차례로 $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}$

$T=2$에서 $T=0,1,2,3,4$가 될 확률은 차례로 $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$

이므로 $\mathrm{P}(T=1)=\frac{8}{45}$, $\mathrm{P}(T=2)=\frac{16}{45}$, $\mathrm{P}(T=3)=\frac{12}{45}$, $\mathrm{P}(T=4)=\frac{6}{45}$

3회째에 $T=3$이 될 확률은

$t=1$: $\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$, $t=2$: $\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

$t=3$: $\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$, $t=4$: $\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{45}\times\frac{2}{5}+\frac{16}{45}\times\frac{1}{5}+\frac{12}{45}\times\frac{2}{5}+\frac{6}{45}\times\frac{4}{15}=\frac{64}{225}$$

$p+q=225+64=289$

선택과목(미적분)

23. **정답 ③**

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left\{4\times\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times\frac{x}{\tan x}\right\}=4\times 1\times 1=4$

24. **정답 ②**

$\frac{3x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$ 이므로

$\int_1^2\frac{3x+1}{x^2+x}\,dx=\left[\ln x+2\ln(x+1)\right]_1^2=\ln 2+2\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{9}{2}$

25. **정답 ③**

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{2n^2+1}\times\frac{2n^2+1}{n^2}\right)=1\times 2=2$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^2+4n}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{a_n^2+4n}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{4}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\frac{4}{2+2}=1$

26. **정답 ⑤**

$0\le t\le\frac{\pi}{4}$ 인 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 지름의 길이가 $2\sqrt{\tan t}$인 반원이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\tan t}\right)^2=\frac{\pi}{2}\tan t$

따라서 구하는 부피는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi}{2}\tan t\,dt=\frac{\pi}{2}\left[-\ln(\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}\ln 2$

27. **정답 ①**

$f(1)=1+a=3$에서 $a=2$이고 $f'(x)=2e^{2x-2}+2>0$ 이므로 $f(x)$는 증가한다.

$f(1)=3$이므로 $g(3)=1$이고 $g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}(x-3)+1=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

따라서 기울기와 y절편의 합은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

28. **정답 ④**

$f''(x)=e^x+2>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고 접선은 곡선의 아래쪽에 있다. 따라서

$S(t)=\int_0^t\{f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)\}\,dx=\int_0^t f(x)\,dx-tf(t)+\frac{t^2}{2}f'(t)$

$S'(t)=f(t)-f(t)-tf'(t)+tf'(t)+\frac{t^2}{2}f''(t)=\frac{t^2}{2}f''(t)$

$S(1)=\int_0^1(e^x+x^2)\,dx-f(1)+\frac{1}{2}f'(1)=\left(e-\frac{2}{3}\right)-(e+1)+\frac{e+2}{2}=\frac{e}{2}-\frac{2}{3}$

$S'(1)=\frac{1}{2}(e+2)=\frac{e}{2}+1$

따라서 $S(1)+S'(1)=e+\frac{1}{3}$

29. **정답 9**

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$이라 하자.

$r\ge 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|=\frac{4}{3}$이 되어 모순이므로 $r<0$

$\frac{a}{1-r}=\frac{4}{3}$에서 $a>0$이고 $\frac{a}{1+r}=4$이므로 연립하면 $a=2$, $r=-\frac{1}{2}$

수열 $\{a_{mn}\}$은 첫째항이 $a_m=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)^m$인 등비수열이다.

(i) m이 짝수일 때, $a_m<0$, 공비는 양수이므로 합이 음수가 되어 부등식을 만족시키지 않는다.

(ii) m이 홀수일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^m}=\frac{4}{2^m+1}>\frac{1}{10}$에서 $2^m<39$, $m\le 5$

따라서 $m=1,\ 3,\ 5$이고 그 합은 9

30. **정답 56**

$p(x)=x(k-x)$라 하면 $0<x<k$에서 $p(x)$는 $x=\frac{k}{2}$에서 최댓값 $M=\frac{k^2}{4}$를 갖고, $0<p(x)\le M$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}(k-2x)\cos\left(\frac{\pi}{2}p(x)\right)$

(i) $x\ne\frac{k}{2}$인 점: $p'(x)\ne 0$이므로 f가 극대 $\iff\sin\frac{\pi p}{2}=1$ $\iff p(x)=4j+1$ $(j=0,1,2,\cdots)$

$4j+1<M$인 각 j에 대하여 $p(x)=4j+1$인 x가 2개 있다.

(ii) $x=\frac{k}{2}$: p가 최대이므로 $\frac{\pi}{2}p$가 $\frac{\pi}{2}M$보다 작아지는 방향

으로 움직인다. 따라서 $\sin\theta$가 $\theta = \frac{\pi}{2}M$의 왼쪽에서 증가하는 경우, 즉 $\cos\frac{\pi M}{2} > 0$이거나 $\sin\frac{\pi M}{2} = 1$일 때만 극대이다. 이는 M을 4로 나눈 나머지가 0 이상 1 이하이거나 3보다 클 때이다.

$k = 1, 2, \cdots, 10$일 때 $M = \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, 9, \frac{49}{4}, 16, \frac{81}{4}, 25$이므로

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(i)	0	0	2	2	4	4	6	8	10	12
(ii)	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
$N(k)$	1	1	2	3	4	5	7	9	11	13

따라서 $\sum_{k=1}^{10} N(k) = 56$

선택과목(기하)

23. **정답 ②**

$\vec{a}+3\vec{b}=(k+3,\ 3k-7)=(8,\ 8)$에서 $k=5$

24. **정답 ③**

점 $(a,\ 4)$에서 초점까지의 거리는 $|a-1|$, 준선까지의 거리는 $4-(-2)=6$이므로 $|a-1|=6$

$a>0$이므로 $a=7$

25. **정답 ③**

$\mathrm{P}\left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b-2}{3},\ \frac{4+2c}{3}\right)$이 z축 위에 있으므로 $a=-4$, $b=2$

$\mathrm{Q}(2\times2-a,\ 2\times(-1)-b,\ 2c-4)=(8,\ -4,\ 2c-4)$가 xy평면 위에 있으므로 $c=2$

$\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ \frac{8}{3}\right)$, $\mathrm{Q}(8,\ -4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{64+16+\frac{64}{9}}=\frac{28}{3}$

26. **정답 ⑤**

접선의 방정식은 $\frac{2x}{a^2}+\frac{3y}{b^2}=1$이고 기울기는 $-\frac{2b^2}{3a^2}=-\frac{1}{2}$이므로 $b^2=\frac{3}{4}a^2$

$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{12}{a^2}=1$에서 $a^2=16$

접선의 x절편은 $\frac{a^2}{2}=8$

27. **정답 ①**

점 A의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 BCD의 무게중심 G이므로 M의 정사영 M′은 선분 GD의 중점이다.

선분 BC의 중점을 N이라 하면 N, G, D는 한 직선 위에 있고 $\overline{\mathrm{ND}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{NG}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{NM'}}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{NM'}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 정사영 MBC의 넓이, 즉 삼각형 M′BC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

28. **정답 ④**

원 C의 반지름은 4이므로 구의 중심 O와 평면 α 사이의 거리는 $\sqrt{25-16}=3$이다. 원 C의 중심을 O′이라 하면 A는 직선 OO′ 위에 있고 $\overline{\mathrm{AO'}}=3+5=8$, $\overline{\mathrm{AO'}}\perp\alpha$이다.

따라서 삼각형 APQ의 정사영은 삼각형 O′PQ이다. O′에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{O'H}}=d$라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{64+d^2}$

$\frac{(\text{삼각형 O'PQ의 넓이})}{(\text{삼각형 APQ의 넓이})}=\frac{d}{\sqrt{64+d^2}}=\frac{1}{3}$에서 $d^2=8$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{16-8}=4\sqrt{2}$

29. **정답 135**

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 $l:\ \frac{x_1x}{4}-\frac{y_1y}{5}=1$이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{T}\left(\frac{4}{x_1},\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{PF'}}=\frac{3}{2}x_1+2$, $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{3}{2}x_1-2$이고 $\overline{\mathrm{F'T}}:\overline{\mathrm{TF}}=\left(3+\frac{4}{x_1}\right):\left(3-\frac{4}{x_1}\right)=\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}$이므로 l은 $\angle\mathrm{F'PF}$를 이등분한다.

$\overline{\mathrm{FQ}}\ /\!/\ l$이므로 $\angle\mathrm{PQF}=\angle\mathrm{PFQ}$ (동위각, 엇각), 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$이고 Q는 선분 F′P의 연장선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$, $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$

삼각형 PF′F의 세 변의 길이는 4, 8, 6이므로 헤론의 공식에서 $S^2=9\times5\times1\times3=135$

30. **정답 80**

정사각형의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=4\overrightarrow{\mathrm{PO}}$이므로 (가)는 $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|=2$, 즉 정사각형에 내접하는 원이다.

$\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$, $\mathrm{D}(4,\ 4)$, $\mathrm{A}(0,\ 4)$로 놓으면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x,\ y-4)\cdot(0,\ -4)=16-4y\le8$, $y\ge2$

따라서 S는 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$의 $y\ge2$인 부분(반원)이다.

$\mathrm{E}(3,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(3,\ -4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(2,\ -2)$이고 R$=(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=14+2(3\cos\theta-4\sin\theta)=14+10\cos(\theta+\varphi)$

(단, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$) $\theta+\varphi$의 범위는 $[\varphi,\ \pi+\varphi]$이므로 $\cos(\theta+\varphi)$의 최댓값은 $\frac{3}{5}$ $(\theta=0)$, 최솟값은 -1 $(\theta=\pi-\varphi)$

$M=14+6=20$, $m=14-10=4$이므로 $M\times m=80$