5지선다형

1. $25^{\frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$ ④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$에 대하여

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

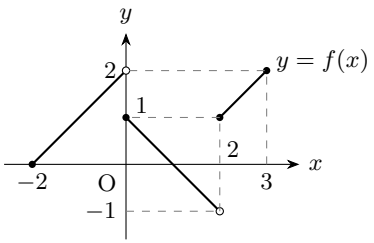
3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 34, \quad \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k + 1) = 18$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

4. 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. $\int_1^3 (x^2+4x)\,dx - \int_1^3 (x^2-2x)\,dx$의 값은? [3점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

6. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여

$$\tan(\pi-\theta) = 2$$

일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

7. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 2$가 $x = 1$에서 극소일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

8. 모든 항이 양수이고 첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_4 = 5S_2$일 때, a_5의 값은? [3점]

① 16 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

9. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + k$에 대하여 직선 $y = 7$이 곡선 $y = f(x)$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

10. 상수 $k\,(k > 1)$에 대하여 함수 $f(x) = 2^x + k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y = f(x)$가 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y = g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하고, 곡선 $y = f(x)$의 점근선과 곡선 $y = g(x)$의 점근선이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + at^2 + bt \quad (a,\ b\text{는 상수})$$

이다. 점 P는 시각 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는 4이다. 출발한 후 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① -6 ② -3 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

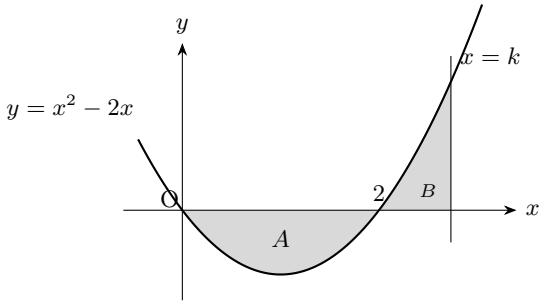
12. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{b_n\}$과 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = n^2 + n$$

을 만족시킨다. $a_1 + a_2 = 20$일 때, a_4의 값은? [4점]

① 120 ② 128 ③ 136 ④ 144 ⑤ 152

13. 곡선 $y = x^2 - 2x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y = x^2 - 2x$와 x축 및 직선 $x = k\,(k > 2)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A = 2B$일 때, 상수 k의 값은? [4점]



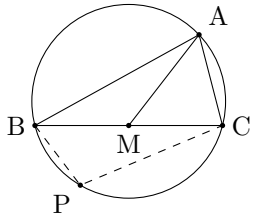
① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$

④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하자.

$$\sin(\angle \mathrm{BAM}) : \sin(\angle \mathrm{MAC}) = 1 : 2,$$
$$\cos(\angle \mathrm{BAC}) = \frac{1}{4}, \quad \overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{6}$$

일 때, 삼각형 ABC의 외접원 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{15}}{3}$ ③ $2\sqrt{15}$ ④ $\frac{7\sqrt{15}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{15}}{3}$

15. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-kt\}\,dt$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 극댓값을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 집합이

$$\{k \mid k \le -1 \text{ 또는 } k=3\}$$

일 때, $k=3$일 때의 함수 $h(x)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{76}{3}$ ② $-\frac{70}{3}$ ③ $-\frac{64}{3}$ ④ $-\frac{58}{3}$ ⑤ $-\frac{52}{3}$

단답형

16. 방정식

$$\log_9(x+11)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=0$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+2x-1$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 원점을 지날 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} ka_k = 120, \quad \sum_{k=1}^{10} ka_{k+1} = 95$$

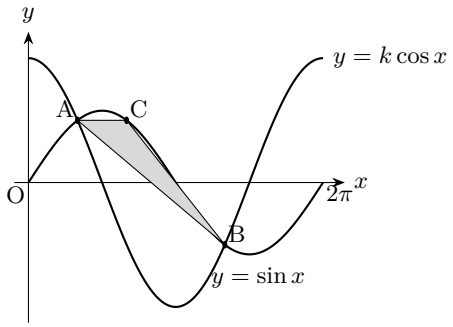
이고 $a_{11} = 3$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 곡선 $y = x^3 - 6x^2 + 11x$ 위의 점 중에서 이 점에서의 접선의 기울기가 최소가 되는 점을 P라 하자. 점 P에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

20. 양수 k에 대하여 $0 < x < 2\pi$에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = k\cos x$가 만나는 두 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = \sin x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 다음은 직선 AB의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 과정이다.

$\tan x = k$의 해 중 작은 것을 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\mathrm{A}(\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha + \pi, -\sin\alpha)$이고, 점 C의 x좌표는 $\pi - \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} =$ (가)

직선 AB의 기울기는 $-\frac{2\sin\alpha}{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi}$이므로 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$이고 $k =$ (나)



점 C의 x좌표는 (다)이고 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $2\sin\alpha = \sqrt{3}$이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$이다.

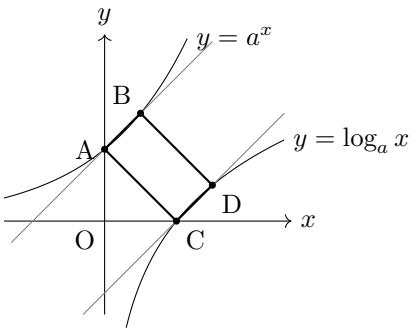
위의 (가)에 알맞은 식을 $f(\alpha)$, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p^2 \times q}{f\left(\frac{5}{12}\pi\right)}$의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\left\{a \,\middle|\, \lim_{x\to a}\frac{f(x)-2x}{f(x)-x^2}=2\right\}=\{0\}$$

을 만족시킨다. 가능한 모든 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 1보다 큰 실수 a에 대하여 직선 $y=x+1$이 곡선 $y=a^x$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 직선 $y=x-1$이 곡선 $y=\log_a x$와 서로 다른 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



5지선다형

23. 네 개의 숫자 $1, 2, 3, 4$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 짝수의 개수는? [2점]

① 112 ② 120 ③ 128 ④ 136 ⑤ 144

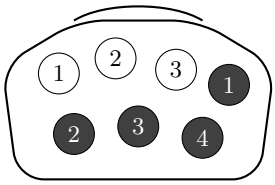
24. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 공의 색이 같으면 두 공에 적혀 있는 수의 합을, 두 공의 색이 다르면 두 공에 적혀 있는 수의 곱을 점수로 한다. 점수가 짝수일 확률은? [3점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$

26. 어느 공장에서 생산하는 과자 한 봉지의 무게는 평균이 m, 표준편차가 7인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 과자 중 49봉지를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $a+b=160$일 때, b의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

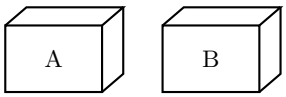
① 81.47 ② 81.96 ③ 82.45
④ 82.94 ⑤ 83.43

27. 1부터 8까지의 자연수 중에서 임의로 1개의 수를 선택한다. 선택된 수의 양의 약수의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(3X+2)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

28. 비어 있는 두 상자 A, B와 상자에 들어 있지 않은 충분히 많은 공이 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3 이하이면 상자에 들어 있지 않은 공 1개를 상자 A에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이상이면
> 상자 A에 공이 있는 경우 상자 A에서 공 1개를 꺼내어 상자 B에 넣고,
> 상자 A에 공이 없는 경우 상자에 들어 있지 않은 공 1개를 상자 B에 넣는다.



이 시행을 6번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 4일 때, 상자 A에 공이 들어 있지 않을 확률은? (단, 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 상자에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 3의 배수인지 확인한 후, 꺼낸 카드를 다시 상자에 넣는다.

이 시행을 450번 반복할 때, 꺼낸 두 카드에 적혀 있는 수의 합이 3의 배수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(135 \le X \le 170)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 할 때, $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.191
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

30. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기순으로 a, b, c, d라 하자. a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킬 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) $a+d=b+c$
> (나) $d-a \ge 6$

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x + \tan x}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^2 \cos x \, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

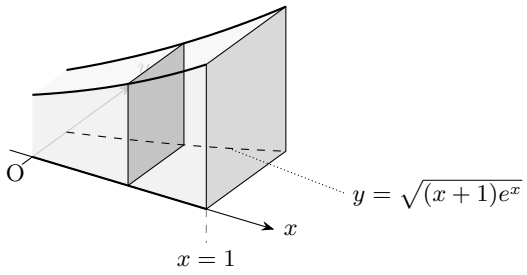
25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2+3n < na_n < 2n^2+3n+5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-4n^2}{n}$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(x+1)e^x}$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $e-1$ ② e ③ $e+1$ ④ $2e-1$ ⑤ $2e$

27. 매개변수 $t\ (t>0)$으로 나타내어진 곡선

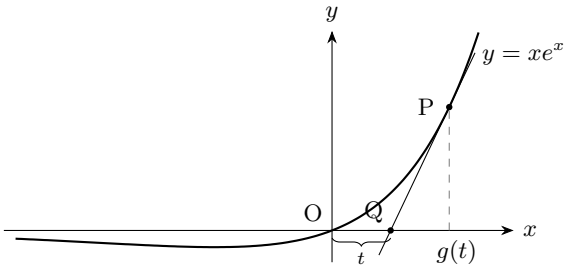
$$x=t+\ln t,\quad y=t^2+2t$$

위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $7+\ln 2$ ② $8+\ln 2$ ③ $9+\ln 2$

④ $10+\ln 2$ ⑤ $11+\ln 2$

28. 그림과 같이 곡선 $y=xe^x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 양수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=t$가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 $g(t)$라 할 때, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{3}} g(t)\,dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{4}{3}-\ln\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}-\ln\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{3}-\ln\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{11}{6}-\ln\dfrac{3}{2}$ ⑤ $2-\ln\dfrac{3}{2}$

단답형

29. 첫째항이 2이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 2인 등비수열 $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_3$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=(x+a)e^x$이 있다. 실수 m에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 함수 $g(m)$이 불연속인 m의 값 중 양수인 것을 모두 곱한 값이 $\frac{1}{e^2}$이다. 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 서로 다른 두 직선의 접점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. [4점]

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=(1,\,3)$, $\vec{a}-\vec{b}=(-2,\,5)$일 때, 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

24. 포물선 $(y-1)^2=a(x+2)$가 점 $(1,\,7)$을 지날 때, 이 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

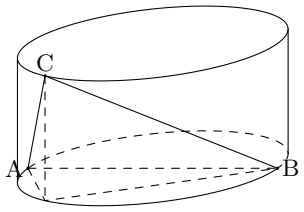
25. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(1,\ a,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{14}$일 때, 선분 BC의 길이는? (단, $a > 0$) [3점]

① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

26. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서의 접선의 x절편이 1이다. 이 쌍곡선의 두 초점 F, F′에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}$의 값은? (단, $a > 0$, $k > 0$) [3점]

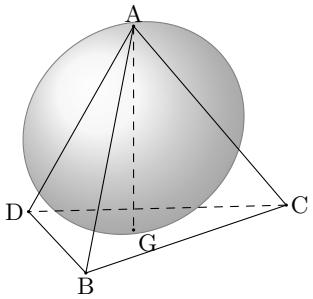
① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

27. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3인 원기둥이 있다. 한 밑면의 지름 AB와 다른 밑면의 둘레 위의 점 C에 대하여 직선 AC와 밑면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$, 직선 BC와 밑면이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 이 원기둥의 높이는? [3점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{3}$

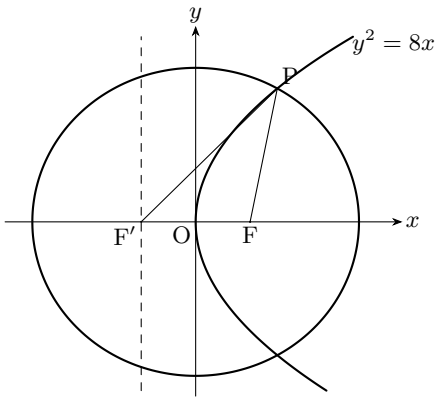
28. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 무게중심 G에서 평면 BCD에 접하고 점 A를 지나는 구를 S라 하자. 구 S와 평면 ABC가 만나서 생기는 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{14}{9}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{16}{9}\pi$ ④ $\frac{17}{9}\pi$ ⑤ 2π

단답형

29. 포물선 $y^2 = 8x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 F′이라 하자. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원이 이 포물선과 제1사분면에서 만나는 점 P에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{PF'F}) = \frac{5}{7}$이다. 이 타원의 단축의 길이를 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 크다.) [4점]



30. 좌표평면에서 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 36$
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 8$

$\overrightarrow{\mathrm{QA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 직선 AB 위에 있지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

제 2 회 빠른 정답

공통과목

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
②	④	①	⑤	③	③	⑤	②	④	①	④

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
②	⑤	①	③	5	36	55	8	12	60	29

선택과목(확률과 통계)

23	24	25	26	27	28	29	30
③	①	⑤	②	④	③	910	79

선택과목(미적분)

23	24	25	26	27	28	29	30
③	①	④	②	④	③	31	12

선택과목(기하)

23	24	25	26	27	28	29	30
②	③	⑤	②	④	③	128	473

공통과목(수학 I, 수학 II)

1. 정답 ②

$25^{\frac{3}{4}} = (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{3}{2}}$ 이므로
$25^{\frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 5$

2. 정답 ④

주어진 극한은 $f'(3)$이다. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$이므로
$f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$

3. 정답 ①

$A = \sum_{k=1}^{10} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{10} b_k$라 하면 $A + 2B = 34$
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k + 1) = 2A - B + 10 = 18$에서 $2A - B = 8$
두 식을 연립하면 $A = 10$, $B = 12$

4. 정답 ⑤

그래프에서 $\lim_{x\to 0-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = 1$
따라서 구하는 값은 $2 + 1 = 3$

5. 정답 ③

주어진 식 $= \int_1^3 \{(x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\}dx = \int_1^3 6x\,dx$
$= \left[3x^2\right]_1^3 = 27 - 3 = 24$

6. 정답 ③

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = 2$에서 $\tan\theta = -2$
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
따라서 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 정답 ⑤

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$에서 $f'(1) = 3 + 2a - 9 = 0$이므로
$a = 3$
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$
$f'(x)$의 부호가 $x = -3$에서 양에서 음으로, $x = 1$에서 음에서 양으로 바뀌므로 $x = 1$에서 극소, $x = -3$에서 극대이다.

극댓값은 $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$

8. **정답 ②**

공비를 $r\,(r > 0)$라 하면 $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2)(1 + r^2) = S_2(1 + r^2)$
$S_2 > 0$이므로 $1 + r^2 = 5$, $r = 2$
따라서 $a_5 = 2 \times 2^4 = 32$

9. **정답 ④**

직선 $y = 7$은 기울기가 0이므로 접점에서 $f'(x) = 0$이다.
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$이므로 접점의 x좌표는 1 또는 3
$f(1) = 4 + k = 7$에서 $k = 3$, $f(3) = k = 7$에서 $k = 7$
따라서 모든 k의 값의 합은 $3 + 7 = 10$

10. **정답 ①**

$f(0) = 1 + k$이므로 $\mathrm{A}(0,\ 1+k)$이고, 두 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}(1+k,\ 0)$
곡선 $y = f(x)$의 점근선은 $y = k$, 곡선 $y = g(x)$의 점근선은 $x = k$이므로 $\mathrm{C}(k,\ k)$
직선 AB: $x + y = 1 + k$와 점 C 사이의 거리는 $\dfrac{|2k - (1+k)|}{\sqrt{2}} = \dfrac{k-1}{\sqrt{2}}$, $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}(1+k)$이므로
(삼각형 ABC의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2}(1+k) \times \dfrac{k-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{k^2-1}{2} = 4$
$k^2 = 9$, $k > 1$이므로 $k = 3$이고 $f(1) = 2 + 3 = 5$

11. **정답 ④**

속도는 $v = 3t^2 + 2at + b$이고, $t = 1$에서 운동 방향을 바꾸므로 $v(1) = 3 + 2a + b = 0$
$x(4) = 64 + 16a + 4b = 4$에서 $4a + b = -15$
두 식을 연립하면 $a = -6$, $b = 9$이므로 $v = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$
v의 부호는 $t = 1$, $t = 3$의 좌우에서 바뀌므로 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = 3$
가속도는 $6t - 12$이므로 구하는 값은 $18 - 12 = 6$

12. **정답 ②**

$c_n = \dfrac{a_n}{b_{n+1}}$이라 하면 $c_1 = 2$이고, $n \geq 2$일 때
$c_n = (n^2 + n) - \{(n-1)^2 + (n-1)\} = 2n$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $c_n = 2n$
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 $r\,(r > 0)$라 하면 $b_{n+1} = r^n$이므로 $a_n = 2n\,r^n$
$a_1 + a_2 = 2r + 4r^2 = 20$에서 $2r^2 + r - 10 = 0$, $(2r+5)(r-2) = 0$이므로 $r = 2$
따라서 $a_4 = 8 \times 2^4 = 128$

13. **정답 ⑤**

$A = \displaystyle\int_0^2 \{-(x^2 - 2x)\}dx = \frac{4}{3}$이므로 $B = \dfrac{2}{3}$
$B = \displaystyle\int_2^k (x^2 - 2x)\,dx = \frac{k^3}{3} - k^2 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$에서
$k^3 - 3k^2 + 2 = 0$, $(k-1)(k^2 - 2k - 2) = 0$
$k > 2$이므로 $k = 1 + \sqrt{3}$

14. **정답 ①**

삼각형 ABM, AMC에서 사인법칙을 쓰면 $\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}}{\sin(\angle \mathrm{BAM})} = \dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\sin B}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{CM}}}{\sin(\angle \mathrm{MAC})} = \dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\sin C}$. $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{CM}}$이므로 $\sin B : \sin C = 1 : 2$, 즉 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1 : 2$.
$\overline{\mathrm{AC}} = a$, $\overline{\mathrm{AB}} = 2a$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}^2 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \frac{1}{4} = 4a^2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2a$. 중선정리 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2)$에서 $5a^2 = 2(6 + a^2)$, $a = 2$. 따라서 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$, $\sin A = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $R = \dfrac{4}{2\sin A} = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$.
외접원의 중심에서 직선 BC까지의 거리는 $d = \sqrt{R^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{64}{15} - 4} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$. 점 P와 직선 BC 사이 거리의 최댓값은 $R + d = \dfrac{10}{\sqrt{15}}$이므로 넓이의 최댓값$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{10}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{3}$.

15. **정답 ③**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$라 하면 $h'(x) = f(x) - kx = x(x^2 + ax + b - k)$. h는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로 h'의 부호가 바뀌는 점이 1개이면 극소만, 3개이면 극대도 갖는다.

h'의 부호가 한 번만 바뀌는 경우는

- $x^2 + ax + b - k$가 실근을 갖지 않거나 중근을 가질 때:

$a^2 - 4(b-k) \le 0$, 즉 $k \le b - \dfrac{a^2}{4}$

- 이 이차식의 한 근이 0일 때($k = b$): $h'(x) = x^2(x+a)$로 부호 변화는 $x = -a$에서 한 번 ($a \neq 0$)

(두 근이 0이 아닌 서로 다른 실근이면 부호 변화 3번.) 따라서 집합은 $\{k \mid k \le b - \frac{a^2}{4}\} \cup \{b\}$이고, 주어진 집합과 비교하면 $b = 3$, $b - \dfrac{a^2}{4} = -1$, $a^2 = 16$.

$k = 3$일 때 $h'(x) = x^2(x+a)$, $h(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{a}{3}x^3$은 $x = -a$에서만 극소이고 극솟값 $h(-a) = \dfrac{a^4}{4} - \dfrac{a^4}{3} = -\dfrac{a^4}{12} = -\dfrac{256}{12} = -\dfrac{64}{3}$ ($a = \pm 4$ 모두 같다).

---

16. 정답 5

진수의 조건에서 $x > 1$이다. $\log_9(x+11) = \frac{1}{2}\log_3(x+11)$, $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = -\log_3(x-1)$이므로 $\log_3(x+11) = 2\log_3(x-1)$, 즉 $x+11 = (x-1)^2$. $x^2 - 3x - 10 = 0$, $(x-5)(x+2) = 0$이고 $x > 1$이므로 $x = 5$.

---

17. 정답 36

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$이므로 $f(x) = x^3 + x^2 - x + C$. 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 4$이고, 이 접선 $y = 4(x-1) + f(1)$이 원점을 지나므로 $f(1) = 4$. $f(1) = 1 + C = 4$에서 $C = 3$이므로 $f(3) = 27 + 9 - 3 + 3 = 36$.

---

18. 정답 55

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} ka_{k+1} = \sum_{k=2}^{11}(k-1)a_k = \sum_{k=2}^{11} ka_k - \sum_{k=2}^{11} a_k$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} ka_k - \sum_{k=1}^{10} ka_{k+1} = a_1 - 11a_{11} + \sum_{k=2}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_k - 10a_{11}$.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = (120 - 95) + 10 \times 3 = 55$.

---

19. 정답 8

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$라 하면 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 11 = 3(t-2)^2 - 1$$

이므로 $t = 2$일 때 최소이고, 최솟값은 -1이다. 따라서 $\mathrm{P}(2, f(2)) = (2, 6)$이고 접선의 방정식은

$$y = -(x-2) + 6 = -x + 8$$

따라서 구하는 y절편은 8이다.

---

20. 정답 12

$\sin x = \sin\alpha$인 점 중 A가 아닌 점의 x좌표는 $\pi - \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = \pi - 2\alpha$, $f(\alpha) = \pi - 2\alpha$

$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$이므로 $k = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{3}$

점 C의 x좌표는 $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$이므로 $q = \dfrac{2}{3}\pi$

$f\left(\dfrac{5}{12}\pi\right) = \pi - \dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\dfrac{p^2 \times q}{f\left(\frac{5}{12}\pi\right)} = \dfrac{3 \times \frac{2}{3}\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

---

21. 정답 60

$P(x) = f(x) - 2x$, $Q(x) = f(x) - x^2$, $R(x) = f(x) - 2x^2 + 2x$라 하면 $P - 2Q = -R$, 즉 $\dfrac{P}{Q} = 2 - \dfrac{R}{Q}$이고 $Q = R + x(x-2)$.

(i) $Q(a) \neq 0$이면 극한값은 $\dfrac{P(a)}{Q(a)}$이고, $= 2 \iff R(a) = 0$.

(ii) $Q(a) = 0$일 때 극한이 존재하려면 $P(a) = 0$. $f(a) = a^2 = 2a$이므로 $a = 0$ 또는 $a = 2$이고 이때 $R(a) = 0$. R이 a에서 단순근이면 $\dfrac{R}{Q} \to \dfrac{R'(a)}{R'(a) + (2a-2)} \neq 0$이라 극한값이 2가 아니고(또는 발산), R이 a에서 중근 이상이면 $\dfrac{R}{Q} \to 0$이라 극한값이 2이다.

또 $R(a) = 0$, $a \notin \{0, 2\}$이면 $Q(a) = a(a-2) \neq 0$이므로 (i)에 의해 a가 집합에 속한다.

정리하면 집합은 (R의 $0, 2$가 아닌 실근)$\cup$(R의 중근 이상인 0 또는 2). 이것이 $\{0\}$이려면 R의 실근은 0(중근 이상)과 2(단순근)뿐이어야 하므로 최고차항의 계수가 1인 삼차식 R은 $R(x) = x^3$ 또는 $R(x) = x^2(x-2)$.

$f(x) = R(x) + 2x^2 - 2x$: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$ 또는 $f(x) = x^3 - 2x$. $f(3) = 39$ 또는 21이므로 합은 60.

---

22. 정답 29

$a^0 = 1 = 0 + 1$이므로 직선 $y = x+1$과 곡선 $y = a^x$는 항상 점 $(0, 1)$에서 만난다. 다른 교점을 $(u, u+1)$ ($u \neq 0$)이라 하자. 두 곡선 $y = a^x$, $y = \log_a x$는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이고 직선 $y = x + 1$을 $y = x$에 대하여 대칭이동하면 $y = x - 1$이므로 C, D는 $(1, 0)$, $(u+1, u)$이다.

변 $(0,1) \to (u, u+1)$의 방향은 $(1,1)$, 변 $(0,1) \to (1,0)$의 방향은 $(1,-1)$이므로 사각형은 직사각형이고 넓이 $= \sqrt{2}|u| \times \sqrt{2} = 2|u| = 1$, $u = \pm\frac{1}{2}$.

- $u = \frac{1}{2}$: $a^{1/2} = \frac{3}{2}$, $a = \frac{9}{4}$
- $u = -\frac{1}{2}$: $a^{-1/2} = \frac{1}{2}$, $a = 4$

($a > 1$이고 $a \neq e$이면 교점이 두 개이며, 두 값 모두 이를 만족한다.) 모든 a의 합 $= \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$, $p + q = 29$.

선택과목(확률과 통계)

23. **정답 ③**

일의 자리의 수는 2 또는 4이므로 2가지, 나머지 세 자리의 수를 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$
따라서 구하는 개수는 $2 \times 64 = 128$

24. **정답 ①**

A와 B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$
$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(B) = \frac{1}{12}$에서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

25. **정답 ⑤**

모든 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2 = 21$
(i) 두 공이 모두 흰 공: 합이 짝수인 것은 $\{1,3\}$의 1가지
(ii) 두 공이 모두 검은 공: 합이 짝수인 것은 $\{1,3\}$, $\{2,4\}$의 2가지
(iii) 색이 다른 경우: $3 \times 4 = 12$가지 중 곱이 홀수인 것은 두 수가 모두 홀수인 $2 \times 2 = 4$가지이므로 곱이 짝수인 것은 8가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{1+2+8}{21} = \frac{11}{21}$

26. **정답 ②**

표본평균을 $\overline{x}$라 하면 신뢰구간은 $\overline{x} - 1.96 \times \frac{7}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{7}{\sqrt{49}}$
즉 $a = \overline{x} - 1.96$, $b = \overline{x} + 1.96$
$a + b = 2\overline{x} = 160$에서 $\overline{x} = 80$이므로 $b = 80 + 1.96 = 81.96$

27. **정답 ④**

$1, 2, \cdots, 8$의 양의 약수의 개수는 차례로 $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4$이므로
$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X = 2) = \frac{4}{8}$, $\mathrm{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X = 4) = \frac{2}{8}$
$\mathrm{E}(X) = \frac{1+8+3+8}{8} = \frac{5}{2}$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1+16+9+32}{8} = \frac{29}{4}$
$\mathrm{V}(X) = \frac{29}{4} - \frac{25}{4} = 1$이므로 $\mathrm{V}(3X+2) = 9\,\mathrm{V}(X) = 9$

28. **정답 ③**

3 이하의 눈을 U, 4 이상의 눈을 D라 하면 D가 나올 때마다 상자 B의 공은 항상 1개씩 늘어난다.
따라서 B의 공이 4개 $\iff$ 6번 중 D가 4번, U가 2번이고, 이런 결과는 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$가지이며 각각의 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^6$으로 같다.
상자 A의 공은 U가 나올 때 1개 늘고, D가 나올 때 A에 공이 있으면 1개 준다. 따라서 마지막에 A가 비어 있으려면 각 U 뒤에 그 공을 꺼낼 D가 있어야 하고, 이는 **뒤에서부터 센 모든 구간에서 D의 개수가 U의 개수 이상**인 것과 같다.
두 U의 위치를 $i < j$라 하면 j번째부터 끝까지에서 D가 $6 - j \ge 1$개, i번째부터 끝까지에서 D가 $5 - i \ge 2$개이어야 하므로 $j \le 5$, $i \le 3$
$i = 1$: $j = 2, 3, 4, 5$ (4가지), $i = 2$: 3가지, $i = 3$: 2가지 $\Rightarrow$ 9가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

29. **정답 910**

두 수의 합이 3의 배수인 경우는
$\{1,2\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$의 5가지이므로 확률은 $\frac{5}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{1}{3}$
X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $\mathrm{E}(X) = 150$,
$\mathrm{V}(X) = 450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 100$
450은 충분히 크므로 X는 근사적으로 $\mathrm{N}(150, 10^2)$을 따른다. $Z = \frac{X - 150}{10}$이라 하면
$\mathrm{P}(135 \le X \le 170) = \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 2) = 0.433 + 0.477 = 0.910$
따라서 $1000 \times k = 910$

30. **정답 79**

모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$

(가)에서 $b - a = d - c$이므로 $b = a + t$, $c = d - t$ (t는 자연수)로 놓을 수 있고, $b < c$에서 $2t < d - a$

$d - a = D$라 하면 (a, d)의 개수는 $10 - D$, t의 개수는 $2t < D$인 자연수 t의 개수이다.

$D = 6$: $4 \times 2 = 8$, $D = 7$: $3 \times 3 = 9$, $D = 8$: $2 \times 3 = 6$, $D = 9$: $1 \times 4 = 4$

조건을 만족시키는 경우의 수는 $8 + 9 + 6 + 4 = 27$

따라서 확률은 $\dfrac{27}{210} = \dfrac{9}{70}$이므로 $p + q = 70 + 9 = 79$

선택과목(미적분)

23. **정답 ③**

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x+\tan x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\tan 3x}{3x}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\tan x}{x}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$

24. **정답 ①**

$1+\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)^2\cos x\,dx=\int_1^2 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{3}$

25. **정답 ④**

주어진 부등식의 각 변을 n으로 나누고 $2n$을 빼면

$3<a_n-2n<3+\dfrac{5}{n}$이고 $\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2n)=3$

또 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{a_n-2n}{n}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-4n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n-2n)\times\left(\dfrac{a_n}{n}+2\right)=3\times 4=12$

26. **정답 ②**

$0\le t\le 1$인 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{(t+1)e^t}$인 정사각형이므로 넓이는 $(t+1)e^t$

따라서 구하는 부피는

$\displaystyle\int_0^1(t+1)e^t\,dt=\left[(t+1)e^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=(2e-1)-(e-1)=e$

27. **정답 ④**

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t}=\dfrac{t+1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+2=2(t+1)$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(t+1)}{\frac{t+1}{t}}=2t$

$2t=4$에서 $t=2$이므로 $a=2+\ln 2$, $b=4+4=8$

따라서 $a+b=10+\ln 2$

28. **정답 ③**

점 P의 x좌표를 s $(s>0)$이라 하면 $y'=(x+1)e^x$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=(s+1)e^s(x-s)+se^s$

$y=0$일 때 $x=s-\dfrac{s}{s+1}=\dfrac{s^2}{s+1}>0$이므로 $t=h(s)=\dfrac{s^2}{s+1}$

$h'(s)=\dfrac{s(s+2)}{(s+1)^2}>0$이므로 h는 $s>0$에서 증가하고 g는 h의 역함수이다.

$h(1)=\dfrac{1}{2}$, $h(2)=\dfrac{4}{3}$이므로 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=2$

$t=h(s)$로 치환하면

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{3}}g(t)\,dt=\int_1^2 s\,h'(s)\,ds=\left[s\,h(s)\right]_1^2-\int_1^2 h(s)\,ds$

$\displaystyle=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)-\int_1^2\left(s-1+\frac{1}{s+1}\right)ds$

$\displaystyle=\frac{13}{6}-\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{3}-\ln\frac{3}{2}$

29. **정답 31**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2d}$

$\dfrac{1}{2d}=\dfrac{1}{6}$에서 $d=3$이므로 $a_3=8$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r $(-1<r<1)$이라 하면

$\dfrac{2}{1-r}=8$에서 $r=\dfrac{3}{4}$

수열 $\{b_{2n}\}$은 첫째항이 $b_2=\dfrac{3}{2}$, 공비가 $r^2=\dfrac{9}{16}$인 등비수열이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$

따라서 $p=7$, $q=24$이고 $p+q=31$

30. **정답 12**

$f(0)=a\neq 0$이므로 $x\neq 0$에서 $f(x)=mx \iff m=\dfrac{f(x)}{x}$

$\varphi(x)=\dfrac{(x+a)e^x}{x}$라 하면 $g(m)$은 곡선 $y=\varphi(x)$와 직선 $y=m$의 교점의 개수이다.

$\varphi'(x)=\dfrac{(x^2+ax-a)e^x}{x^2}$이고 $x^2+ax-a=0$은 $a>0$이므로 서로 다른 두 실근 $x_1<0<x_2$를 갖는다.

$x\to-\infty$일 때 $\varphi(x)\to 0+$, $x\to 0-$일 때 $\varphi(x)\to-\infty$,

$x \to 0+$ 일 때 $\varphi(x) \to \infty$, $x \to \infty$ 일 때 $\varphi(x) \to \infty$ 이므로 $x < 0$에서 φ는 $x = x_1$에서 극대(양수), $x > 0$에서 $x = x_2$에서 극소이다.

따라서 $g(m)$이 불연속인 m의 값은 0, $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$이고 양수인 것은 $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$

이때 $x = x_i$에서 직선 $y = \varphi(x_i)x$는 곡선에 접하므로 $\varphi(x_i) = f'(x_i) = (x_i + a + 1)e^{x_i}$ 이고, $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = -a$ 이므로

$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \{x_1x_2+(a+1)(x_1+x_2)+(a+1)^2\}e^{x_1+x_2} = e^{-a}$

$e^{-a} = e^{-2}$에서 $a = 2$이고, 원점을 지나는 접선의 접점의 x좌표 α, β는 $x^2 + 2x - 2 = 0$의 두 근이므로

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 + 8 = 12$

선택과목(기하)

23. **정답 ②**

$\vec{b} = \vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) = (1, 3) - (-2, 5) = (3, -2)$ 이므로 $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1)$, 성분의 합은 5

24. **정답 ③**

$36 = 3a$에서 $a = 12$이다. 포물선 $(y-1)^2 = 12(x+2)$는 $y^2 = 12x$를 평행이동한 것이고 $4p = 12$, $p = 3$이다.

초점과 준선 사이의 거리는 $2p = 6$

25. **정답 ⑤**

$\mathrm{B}(-1, a, 3)$, $\mathrm{C}(-1, -a, -3)$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2 = 4 + 4a^2 + 36 = 56$에서 $a^2 = 4$, $a = 2$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{0^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

26. **정답 ②**

접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{12} = 1$이고 x절편이 $\frac{a^2}{4} = 1$이므로 $a^2 = 4$이다.

$\frac{16}{4} - \frac{k^2}{12} = 1$에서 $k = 6$이고, $c^2 = 4 + 12 = 16$이므로 두 초점은 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이다.

$\mathrm{P}(4, 6)$에서 한 초점까지 거리는 6, 다른 초점까지 거리는 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$이므로 곱은 60

27. **정답 ④**

점 C에서 지름 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면 C'은 그 밑면의 둘레 위에 있으므로 $\angle \mathrm{AC'B} = \frac{\pi}{2}$이다.

높이를 h라 하면 $\overline{\mathrm{AC'}} = \frac{h}{\tan\frac{\pi}{4}} = h$, $\overline{\mathrm{BC'}} = \frac{h}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}h$이고

$\overline{\mathrm{AC'}}^2 + \overline{\mathrm{BC'}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$에서 $4h^2 = 36$, $h = 3$

28. **정답 ③**

$\overline{\mathrm{AG}} \perp$(평면 BCD)이고 $\overline{\mathrm{AG}} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$이다.

구 S는 G에서 평면 BCD에 접하므로 중심 O는 직선 AG 위에 있고, $\overline{\mathrm{OG}} = \overline{\mathrm{OA}}$이므로 O는 선분 AG의 중점, 반지름은 $\sqrt{6}$이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} = 3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{GM}} = \sqrt{3}$이고, 평면 AGM은 BC에 수직이므로 평면 ABC에 수직이다. 따라서 직선 AG와 평면 ABC가 이루는 각은 $\angle \mathrm{GAM}$이고 $\sin(\angle \mathrm{GAM}) = \frac{\overline{\mathrm{GM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = \frac{1}{3}$이다.

O에서 평면 ABC까지의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$이므로 원의 반지름을 r이라 하면 $r^2 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$, 원의 넓이는 $\frac{16}{3}\pi$

두 평면 ABC, BCD가 이루는 각 φ에 대하여 $\cos\varphi = \frac{\overline{\mathrm{GM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = \frac{1}{3}$이므로 구하는 넓이는 $\frac{16}{3}\pi \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}\pi$

29. **정답 128**

$\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F'}(-2, 0)$이고 준선은 $x = -2$이다. P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{PF}}$이다.

$\overline{\mathrm{PH}} \,//\, x$축이므로 $\angle \mathrm{HPF'} = \angle \mathrm{PF'F}$이고, 직각삼각형 PHF′에서 $\cos(\angle \mathrm{HPF'}) = \frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PF'}}} = \frac{5}{7}$

$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}} = 5t$, $\overline{\mathrm{PF'}} = 7t$로 놓으면 $\overline{\mathrm{HF'}} = 2\sqrt{6}t$는 P의 y좌표이고, P의 x좌표는 $5t - 2$이다.

$(2\sqrt{6}t)^2 = 8(5t-2)$에서 $3t^2 - 5t + 2 = 0$, $t = 1$ 또는 $t = \frac{2}{3}$

P의 x좌표가 2보다 크므로 $t = 1$, $\overline{\mathrm{PF}} = 5$, $\overline{\mathrm{PF'}} = 7$이다.

타원의 장축의 길이는 12이므로 $a = 6$, $c = 2$, $b^2 = 36 - 4 = 32$이고 $k = 2b$이므로 $k^2 = 4 \times 32 = 128$

30. **정답 473**

원의 중심을 O라 하면 $\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = 36$, $\overline{\mathrm{AP}} = 6$, $\overline{\mathrm{BP}} = 8$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PB}} = 8$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OB}}$이므로 직선 OP는 선분 BQ의 수직이등분선이다. 즉 Q는 B를 직선 OP에 대하여 대칭이동한 점이다. (Q≠B)

O를 원점, $\mathrm{A}(-5, 0)$, $\mathrm{B}(5, 0)$으로 놓으면 $\mathrm{P}\left(-\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$ (P가 아래쪽이어도 대칭이므로 결과는 같다.)

직선 OP의 단위벡터 $\vec{u} = \left(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$에 대하여 $\vec{q} =$

$2(\vec{b}\cdot\vec{u})\vec{u}-\vec{b}$이므로 $\mathrm{Q}\left(-\frac{527}{125},-\frac{336}{125}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\left(-\frac{98}{125},\frac{336}{125}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(\frac{352}{125},\frac{936}{125}\right)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{-98\times352+336\times936}{125^2}=\frac{280000}{15625}=\frac{448}{25}$

따라서 $p+q=25+448=473$